UNIVERSIDADE DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Estudo comparativo dos programas oficiais de Matemática A de 2001 e 2014 para o ensino secundário

Mestrado em Matemática para Professores

Ilca Maria Guerra Nobre da Cruz

Dissertação orientada por:

Prof.ª Doutora Ilda Perez Fernandez da Silva

2015

À memória do meu pai

Agradecimentos

Este espaço é dedicado àqueles que deram a sua contribuição para que esta dissertação fosse realizada. A todos eles deixo aqui o meu agradecimento sincero.

- À FCUL que fez com que este Mestrado convertesse um sonho antigo num trabalho que desenvolvi com muito interesse e que foi, para mim, muito enriquecedor.

- À minha orientadora, Professora Doutora Ilda Perez Fernandez da Silva, pelo apoio e orientação disponibilizados na realização deste trabalho, conselhos, sugestões e sobretudo, pelas suas palavras de ânimo nas horas determinantes.

- Aos meus familiares e amigos que me incentivaram e me ajudaram a ter mais tempo para dedicar ao Mestrado.

- À minha filha Isa e ao João que não se esqueceram de me estimular até ao fim.

- Ao meu marido que está sempre presente quando é preciso e que, como sempre, colaborou no que estava ao seu alcance.

- E devo um enorme agradecimento à minha filha Inês. Sem os seus cozinhados, as suas compras, a sua companhia e a sua generosidade infinita, teria tido o meu dia-a-dia muito mais dificultado.

Obrigada!

Resumo

O sucesso e o gosto dos jovens pela Matemática determinam o rumo da sua vida e, muitas vezes, também o seu êxito profissional. Se a tendência "natural" para os números atrai os bons resultados, também o bom desempenho nas atividades aumenta a motivação e facilita o processo ensino-aprendizagem.

O papel crucial do docente consiste em lecionar o Programa de modo a que os alunos atinjam os objetivos propostos e desenvolvam o gosto pela Matemática.

Este trabalho apresenta as principais diferenças entre o Programa de *Matemática A* que se vai iniciar em 2015-16 e o que existia até agora. Foi feita a comparação dos temas/domínios lecionados em cada ano de escolaridade do Ensino Secundário. São indicadas as diferenças encontradas na organização, na metodologia, na formalização e no grau de exigência dos conteúdos a abordar.

Nos temas novos e nos assuntos que devem ser tratados de maneira diferente apresentam-se alguns exercícios e sugestões de resolução. Por vezes, também se indicam algumas estratégias que podem aumentar a motivação para a aprendizagem.

No final da análise feita a cada domínio de conteúdo, é apresentado um breve comentário que resulta da interpretação dos descritores elencados nas Metas Curriculares e da leitura do Caderno de Apoio.

Os comentários refletem trinta anos de prática docente no ensino público e pretendem identificar o que os docentes devem preparar com mais detalhe para as suas aulas, incentivar o trabalho colaborativo nas planificações e contribuir para o diagnóstico das áreas onde, eventualmente, é necessário existir e desenvolver formação adequada.

A aplicação do Programa de Matemática A, a partir de 2015-16, vai provocar várias mudanças. O conhecimento dos docentes, em cada ciclo de ensino, sobre o que os alunos aprenderam e como aprenderam e a melhoria da articulação entre o Ensino Superior e o Ensino Secundário pode reduzir o impacto e promover o sucesso de todos, alunos e professores.

Palavras-chave: Matemática A; Metas Curriculares; Sistema de Ensino Português

Abstract

Adolescents' passion and success with Mathematics determines the course of their lives and, often, their professional accomplishments. If a natural tendency for numbers attracts good results, good performance in activities also increases motivation and eases the teaching-learning process.

The crucial role of the teacher consists of teaching the syllabus so that students achieve the proposed objectives and develop a taste for Mathematics.

In this work we highlight the main differences between the Mathematics A Syllabus which will start in 2015-16 and the current one. A comparison is made in respect of the different themes/subjects taught in each different grade of Secondary Education. We consider the points of view of organisation, methodology, formalisation and level of achievement demanded by the respective syllabuses.

For the newly-introduced themes as well as the subjects which need to be treated differently, some exercises and suggested solutions are presented. Additionally, there are strategies that may increase the motivation of the students.

After the analysis of each of the different themes, we present a brief commentary which results from the interpretation of the descriptors listed in the Curricular Goals of the Support Notebook.

These commentaries reflect thirty years of teaching experience in public education and aim to identify what teachers should prepare in more detail for their classes, encourage collaborative work on lesson plans and contribute to the diagnosis of areas where, possibly, there is the need to create and develop appropriate training.

The application of the Mathematics A syllabus, from 2015-16, will introduce several changes. The knowledge of teachers in each educational cycle about what students have already learned and how they learnt it, and improved links between Secondary and Higher Education, can reduce the impact and promote success for both students and teachers.

Keywords: Mathematics A; Curricular Goals; Portuguese Education System

Conteúdo

Capítulo 1 – Introdução

É necessário enquadrar o aparecimento de ambos os Programas no tempo e tentar entender as “ideias centrais” que os nortearam, antes de se proceder a uma comparação.

Os Programas estão organizados de formas diferentes, quer nos aspetos práticos e objetivos, quer nos princípios que lhes são subjacentes.

Os temas que são estudados, em cada ano de escolaridade do Ensino Secundário, e o número de aulas que lhes é atribuído, também são fatores importantes a considerar na análise comparativa e detalhada que constitui o objeto deste trabalho.

Segue-se uma síntese do que se acabou de referir.

1.1. Do Atual ao Novo Programa de Matemática A do Ensino Secundário

PROGRAMA ATUAL Homologado em 22/02/2001		**PROGRAMA NOVO** Homologado em 20/01/2014 Está prevista para o ano letivo 2015/2016 a sua implementação no 10.º ano de escolaridade, prosseguindo nos anos seguintes para os 11.º e 12.º anos de escolaridade.
Ideias centrais[#a] Originárias do *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989 – National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*	**Críticas** • A Matemática é uma ciência cumulativa, que se aprende passo a passo,	**Ideias centrais** Provenientes do *Curriculum Focal points, 2006; Principles and Standards for School Mathematics, 2007*

• A ideia de que o aluno deve ser um "investigador", que deve ser confrontado com "situações problemáticas" e construir a partir delas o seu próprio conhecimento (construtivismo). • O abandono do ensino de técnicas elementares e sistemáticas (algoritmos, procedimentos de resolução de problemas rotineiros,…etc). • "Não é o que se ensina, é como se ensina". Abandono da Matemática enquanto corpo de conhecimentos estruturado. • Aprendizagem da Matemática de forma muito intuitiva. Realce para a utilização da calculadora gráfica e outros recursos tecnológicos. • Secundarização da avaliação dita "sumativa" e o não estabelecimento de objetivos precisos para o ensino.	existindo uma clara hierarquia na aquisição de conceitos que deve ser respeitada. • Não é razoável pensar que os alunos conseguem redescobrir só por si conceitos que levaram séculos a construir e a aperfeiçoar. • Memorizar procedimentos e rotinas elementares é um passo fundamental na aprendizagem da Matemática: não se deve opor memorização e compreensão. • Não é possível ser-se criativo e resolver problemas originais sem uma aprendizagem prévia, estruturada e séria de teorias, linhas de raciocínio e procedimentos clássicos. • A avaliação reforça a aprendizagem.	e do *National Mathematics Advisory Panel (NMAP), 2008 – Foundations for Success: the Final Report of the NMAP* *Common Core State Standards* • Introduzir os conteúdos de forma progressiva, estruturada e coerente. • Indicar claramente os objetivos a atingir pelos alunos em cada ano curricular. • Não colocar em oposição a memorização e a compreensão, são aspetos que se reforçam mutuamente. • Treinar procedimentos rotineiros e conhecer factos e resultados elementares, para que possam ser facilmente mobilizados quando necessário. • Promover a compreensão conceptual dos objetos matemáticos. • Utilizar a tecnologia de

Havia a forte convicção que era desta forma que se atingiria a “compreensão Matemática”.		forma cuidadosa e criteriosa. • Sensibilizar a comunidade educativa para a estreita relação que existe entre o esforço desenvolvido pelo aluno e o sucesso na disciplina.

[#a]Os princípios orientadores dos Programas foram apresentados pelos respetivos autores nas ações sobre o Novo Programa e as Metas Curriculares de Matemática A no Ensino Secundário:
- formação de 3 horas que se realizou no dia 14 de março de 2015 em Lisboa, na FIL (Parque das Nações) com António Bívar e Filipe Oliveira;
- ação de formação de 25 horas que decorreu entre 8 e 29 de novembro na Escola Secundária Padre António Vieira com Paula Reis.

Foram fatores determinantes para a explicitação e especificação dos conhecimentos que os alunos devem alcançar e das capacidades que devem desenvolver em cada disciplina, as avaliações (relativas aos sistemas de ensino) internacionais em que Portugal participa, através de programas como o PISA[1], o PIRLS[2] e o TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks[3]. Nesta última Portugal participa desde este ano, 2015, com o objetivo de estudar os resultados obtidos pelos alunos que se encontram no final do Ensino Secundário nas disciplinas de Física e Matemática, em áreas destinadas ao prosseguimento de estudos em cursos de ciências e tecnologias.

A especificação destas duas componentes – conhecimentos e capacidades – adotou, em Portugal, a designação de “Metas Curriculares”.

[1] *Programme for International Student Assessment*, tem por objetivo avaliar a literacia em Leitura, Matemática e Ciências nos jovens de 15 anos, independentemente do ano de escolaridade que frequentam. É coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE), com vista a melhorar as políticas e resultados educacionais. Foi realizado pela primeira vez em 2000 e é repetido a cada três anos.

[2] *Progress in International Reading Literacy Study*, (destina-se aos 4.º e 8.ºanos).
É organizado pela Associação Internacional para a Evolução do Rendimento Educativo (IEA). Foi realizado pela primeira vez em 2001 e é repetido a cada cinco anos.

[3] *Trends in International Mathematics and Science Study* (destina-se ao 4.º e 8.ºanos).
É organizado pela Associação Internacional para a Evolução do Rendimento Educativo (IEA). Foi realizado pela primeira vez em 1995 e é repetido a cada quatro anos. O *TIMSS Advanced* é uma versão mais recente que tem por objeto os alunos do 12.º ano. (http://iave.pt/np4/np4/11.html)

As Metas Curriculares, que com o Programa formam um documento único, elencam, para cada domínio e em consonância com os conteúdos, os objetivos gerais a atingir em cada ano de escolaridade. Cada um deles encontra-se definido de forma precisa por um conjunto de descritores que apontam para desempenhos específicos e avaliáveis que os alunos deverão evidenciar para que esses objetivos se considerem cumpridos.
O Programa e as Metas Curriculares respeitam a estrutura cumulativa que é característica da disciplina de Matemática, apoiando-se os novos conhecimentos em outros previamente estudados e adquiridos.(…) O Programa e as respetivas Metas foram concebidos por forma a fornecer aos alunos instrumentos que garantam um prosseguimento de estudos com sucesso, tendo em consideração que é este o ramo da Matemática do Ensino Secundário que dá acesso aos cursos do Ensino Superior de áreas que requerem uma sólida formação matemática. [4]

O novo Programa pressupõe:

- uma aprendizagem, progressiva, coerente e estruturada da Matemática, do 1.º ao 12.º ano de escolaridade (também foram elaborados Programas novos para o Ensino Básico orientados pelos mesmos princípios).
- Objetivos claros e avaliáveis. O professor tem liberdade para selecionar as estratégias de ensino adequadas para os atingir.
- Utilização criteriosa das novas tecnologias, por forma a não subvalorizar a compreensão conceptual e a capacidade de resolver problemas dos alunos.
- A resolução de problemas de complexidade crescente, rotineiros e não rotineiros.
- A memorização aliada à compreensão de um conjunto de conhecimentos.

As Metas são únicas, devendo, nessa medida, ser alcançadas por todos os alunos. Estão escritas em linguagem técnica com o objetivo de minimizar eventuais leituras ambíguas dos professores.

Para clarificar a relação entre o que se pretenda que o aluno aprenda e os processos envolvidos nessa aprendizagem, os objetivos a atingir em cada ano são definidos

[4] Pág.3 do Programa e Metas Curriculares de Matemática A – Ensino Secundário

pelos descritores e explicitados por verbos que traduzem os seis desempenhos fundamentais que os alunos devem revelar ao longo do Ensino Secundário:

- **Identificar/Designar/Referir** – o aluno deve saber definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.
- **Reconhecer** – o aluno deve saber justificar os passos utilizados numa resolução.
- **Saber** – o aluno deve conhecer o resultado sem que lhe seja exigido saber a demonstração ou qualquer verificação concreta.
- **Provar/Demonstrar** – o aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto o possível.
- **Justificar e Interpretar** – o aluno deve justificar ou interpretar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.

Alguns descritores aparecem com marcadores especiais «+» e «#». O significado é o seguinte:

«+»: quando se trata de propriedades que os alunos devem reconhecer, ou procedimentos que devem efetuar ou problemas que devem resolver, são considerados diferentes níveis de desempenho e estão especificados no caderno de apoio (* significa que é um item com um nível de desempenho mais exigente);

quando o marcador está aplicado a propriedades que os alunos devem provar, entende-se que, todos devem conhecer o resultado em causa e saber aplicá-lo, mas a elaboração da demonstração não é exigível aos alunos (é facultativa).

«#»: o grupo de descritores de um mesmo objetivo geral assinalado com «#» tem demonstrações muito semelhantes entre si, ficando ao critério do professor quais devem ser tratados como exemplo. Os alunos devem conhecer os resultados/propriedades.

Os descritores estão redigidos numa linguagem destinada ao professor, devendo este selecionar uma estratégia de ensino adequada à respetiva concretização e adaptar a linguagem ao nível etário dos alunos, sempre que necessário.

Os **Cadernos de Apoio** às metas curriculares (um por cada ano de escolaridade), disponibilizados aos professores, contêm alguns suportes teóricos aos objetivos e descritores, alguns exemplos de concretização dos descritores e níveis de desempenho esperados.

Seguem-se dois quadros:

- uma listagem dos temas/domínios de conteúdos dos Programas de Matemática A, respetivamente de 2001 e 2014;
- a distribuição do número de aulas do ano letivo por conteúdo, em cada um dos Programas.

1.2. Estudo comparativo do Programa antigo (atual) com o Novo Programa (a partir de 2015/2016)

<table>
<tr><th colspan="2">PROGRAMA ATUAL</th><th>PROGRAMA NOVO</th></tr>
<tr>
<td>Temas Transversais

Comunicação Matemática.

Aplicações e Modelação Matemática.

História da Matemática.

Lógica e Raciocínio Matemático.

Resolução de Problemas e Atividades Investigativas.

Tecnologia e Matemática.</td>
<td>10º ano
• Geometria no Plano e no Espaço I
• Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.
• Estatística
11º ano
• Geometria no Plano e no Espaço II
• Funções racionais e com radicais
• Taxa de variação e derivada
• Sucessões reais
12º ano
• Probabilidades e Combinatória
• Funções exponenciais e logarítmicas. Limites e continuidade. Conceito de derivada e aplicações.
• Trigonometria e números complexos</td>
<td>10º ano
• Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC 10)
• Álgebra (ALG 10)
• Geometria Analítica (GA 10)
• Funções Reais de Variável Real (FRVR 10)
• Estatística (EST 10)
11º ano
• Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI 11)
• Geometria Analítica (GA 11)
• Sucessões (SUC 11)
• Funções Reais de Variável Real (FRVR 11)
• Estatística (EST 11)
12º ano
• Cálculo Combinatório (CC 12)
• Probabilidades (PRB 12)
• Funções Reais de Variável Real (FRVR 12)
• Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI 12)
• Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL 12)
• Primitivas e Cálculo Integral (PCI 12)
• Números Complexos (NC 12)</td>
</tr>
</table>

1.3. Distribuição do número de aulas do ano letivo por conteúdo, em cada um dos Programas

10º ano - Matemática A (Quadro-resumo)

PROGRAMA ATUAL	PROGRAMA NOVO
Módulo Inicial – 18 aulas[5] O professor deve propor neste módulo problemas ou atividades aos estudantes que permitam consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 3.º ciclo de modo, tanto a detetar dificuldades em questões básicas como a estabelecer uma boa articulação entre o 3º ciclo e o Ensino Secundário.	**Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC10) – 18 aulas**[6] • Introdução à lógica bivalente e à teoria dos conjuntos. – Proposições – Condições e conjuntos
Geometria no Plano e no Espaço I – 54 aulas • Resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço. • Geometria Analítica. O método cartesiano para estudar Geometria no plano e no espaço.	**Álgebra (ALG 10) – 30 aulas** • Radicais • Potências de expoente racional • Polinómios **Geometria Analítica (GA 10) – 54 aulas** • Geometria analítica no plano • Cálculo vetorial no plano • Geometria analítica no espaço • Cálculo vetorial no espaço
Funções e gráficos. Funções Polinomiais. Função módulo – 54 aulas • Função, gráfico e representação gráfica. • Estudo intuitivo de propriedades da: – função quadrática;	**Funções Reais de Variável Real (FRVR 10) – 58 aulas** • Generalidades acerca de funções. • Generalidades acerca de funções reais de variável real.

[5] Considera-se uma aula como um tempo letivo de 45 minutos
[6] Considera-se uma aula como um tempo letivo de 45 minutos

–função módulo. • Funções polinomiais (graus 3 e 4). • Decomposição de polinómios em fatores. **Estatística – 30 aulas** • Estatística – Generalidades. • Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). • Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva) **Temas Transversais** • Comunicação Matemática • Aplicações e Modelação Matemática • História da Matemática • Lógica e Raciocínio Matemático • Resolução de Problemas e Atividades Investigativas • Tecnologia e Matemática **Total de aulas previstas – 156**	• Monotonia, extremos e concavidade. • Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo e funções definidas por ramos. • Resolução de problemas. **Estatística (EST 10) – 18 aulas** • Características amostrais **Total de aulas previstas – 178**

Ambos os programas consideram na planificação **o número de semanas efetivas de aulas** (no programa antigo é explícito que consideram 30), **incluindo nesse número as aulas dedicadas à avaliação**.

Para analisar a viabilidade desta planificação, considerando-se a organização do ano letivo 2014-2015[7], pode verificar-se que a **distribuição de aulas num ano letivo** se aproxima do que se refere na tabela seguinte.

2014-2015	**1ºP**	**2ºP**	**3ºP**	**Total**
Nº de semanas	13	10	8/9[(8)]	31/32
Nº de aulas de 45 minutos	78	60	48/54	186/192

Há uma diferença de 22 aulas (3,(6) semanas) nas planificações para o 10ºano dos dois programas.

O número de aulas previstas, 178, está ajustado ao tamanho do ano letivo.

Contudo, deveria estar previsto o reforço da carga horária na Disciplina de Matemática A no 10.º ano em 2015/16.

Os alunos que vão ingressar no 10.º ano de Matemática A, no ano letivo 2015/16, vêm do Ensino Básico com o Programa Antigo (de 2007) que tem diferenças nos conteúdos, na abordagem utilizada e na metodologia. (O Novo Programa do 9ºano do Ensino Básico vai ser implementado também em 2015/16)

Para permitir a viabilidade desta planificação (atendendo aos pressupostos do Programa), considerando-se o calendário escolar e a organização do ano letivo 2015-2016[9], os docentes de Matemática A podem propor ao Conselho Pedagógico da sua Escola que **o Programa seja distribuído por 7 aulas (tempos letivos) semanais**. Este acréscimo de 32 aulas no ano letivo tem como objetivo minimizar os efeitos negativos que uma mudança significativa do Programa (a meio do percurso escolar) pode ter na aprendizagem dos alunos[10].

[7] Despacho n.º 8651/2014 de 3 de julho

[8] As aulas do 10º ano terminam 1 semana depois do 11º e 12º anos atendendo a que os alunos destes dois últimos anos têm de efetuar Exames Nacionais.

[9] Alínea c) do ponto 1 do Artigo 11.º do Despacho normativo n.º10-A/2015 de 19 de junho

[10] Esta medida, reforço da carga curricular, foi aprovada no CP do Agrupamento de Escolas Pioneiros da Aviação Portuguesa e vai ser aplicada em 2015/16, na Escola Secundária da Amadora.

11º ano - Matemática A (Quadro-resumo)

PROGRAMA ATUAL	PROGRAMA NOVO (a iniciar em 2016/17)
Geometria no Plano e no Espaço II – 60 aulas • Problemas envolvendo triângulos • Círculo trigonométrico e funções seno, cosseno e tangente • Equações trigonométricas elementares • Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço • Perpendicularidade de vetores e de retas: equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vetor normal • Interseção, paralelismo e perpendicularidade de retas e planos • Programação linear (breve introdução)	**Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI 11) – 38 aulas** • Extensão da Trigonometria a ângulos retos, obtusos e resolução de triângulos • Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações • Razões trigonométricas de ângulos generalizados • Funções trigonométricas **Geometria Analítica (GA 11) – 32 aulas** • Declive e inclinação de uma reta no plano • Produto escalar de vetores • Equações de planos no espaço
Introdução ao Cálculo Diferencial I – 60 aulas **Funções racionais e com radicais.** **Taxa de variação e derivada** • Problemas envolvendo funções ou taxa de variação • Estudo intuitivo das propriedades das funções do tipo $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$ • Aproximação experimental da noção de limite • Taxa média de variação e derivadas em casos simples • Funções definidas por ramos	**Sucessões (SUC 11) – 44 aulas** • Conjunto dos majorantes e conjunto dos minorantes de uma parte não vazia de $\mathbb{R}$ • Generalidades acerca de sucessões • Princípio de indução matemática • Progressões aritméticas e geométricas • Limites de sucessões **Funções Reais de Variável Real (FRVR 11) – 56 aulas** • Limite segundo Heine de funções reais de variável real

• Operações com funções. Composição e inversão de funções (Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fracionário. Simplificação de expressões com radicais, não incluindo a racionalização) **Sucessões reais – 48 aulas** • Definição e propriedades • Progressões aritméticas e geométricas • Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e primeira definição do número ***e*** • Limites infinitamente grandes e infinitamente pequenos • Limites reais e convergência **Temas Transversais** • Comunicação Matemática • Aplicações e Modelação Matemática • História da Matemática • Lógica e Raciocínio Matemático • Resolução de Problemas e Atividades Investigativas • Tecnologia e Matemática **Total de aulas previstas – 168**	• Continuidade de funções • Assíntotas ao gráfico de uma função • Derivadas de funções de variável real e aplicações **Estatística (EST 11) – 8 aulas** • Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação **Total de aulas previstas – 178**

Há uma diferença de 10 aulas (1,(6) semanas) nas planificações para o 11ºano dos dois programas.

12º ano - Matemática A (Quadro-resumo)

PROGRAMA ATUAL	PROGRAMA NOVO (a iniciar em 2017/18)
Probabilidades e Combinatória – 60 aulas • Introdução ao cálculo de probabilidades • Distribuição de frequências e distribuição de probabilidades • Análise combinatória **Introdução ao Cálculo Diferencial I – 60 aulas** • Funções exponenciais e logarítmicas • Teoria de limites • Cálculo diferencial • Problemas de otimização **Trigonometria e Números Complexos – 48 aulas** • Funções seno, cosseno e tangente; cálculo de derivadas • Introdução histórica dos números complexos • Complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica; operações e interpretação geométrica • Domínios planos e condições em	**Cálculo Combinatório (CC 12) – 18 aulas** • Propriedades das operações sobre conjuntos • Introdução ao cálculo combinatório • Triângulo de Pascal e Binómio de Newton **Probabilidades (PRB 12) – 20 aulas** • Espaços de probabilidades • Probabilidade condicionada **Funções Reais de Variável Real (FRVR 12) – 34 aulas** • Limites e continuidade • Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão • Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas **Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI 12) – 26 aulas** • Diferenciação de funções trigonométricas • Aplicações aos osciladores harmónicos **Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL 12) – 40 aulas**

variável complexa. **Temas Transversais** • Comunicação Matemática • Aplicações e Modelação Matemática • História da Matemática • Lógica e Raciocínio Matemático • Resolução de Problemas e Atividades Investigativas • Tecnologia e Matemática **Total de aulas previstas – 168**	• Juros compostos e número de Neper • Funções exponenciais • Funções logarítmicas • Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas • Modelos exponenciais **Primitivas e Cálculo Integral (PCI 12)** – **20 aulas** • Noção de primitiva • Cálculo integral • Resolução de problemas **Números Complexos (NC 12)** – **26 aulas** • Introdução aos números complexos • Complexo conjugado e módulo dos números complexos • Quociente de números complexos • Exponencial complexa e forma trigonométrica dos números complexos • Raízes n-ésimas de números complexos • Resolução de problemas. **Total de aulas previstas – 184**

Há uma diferença de 16 aulas (2,(6) semanas) nas planificações para o 12ºano dos dois programas.

No 12.º ano só com os três blocos (seis aulas) semanais vai ser muito difícil cumprir o Programa e preparar os alunos para um Exame Nacional que contempla os três anos do ciclo.

1.4. Domínios

10.º ano

- Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC)
- Álgebra (ALG)
- Geometria Analítica (GA)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Estatística (EST)

11.º ano

- Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI)
- Geometria Analítica (GA)
- Sucessões (SUC)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Estatística (EST)

12.º ano

- Cálculo Combinatório (CC)
- Probabilidades (PRB)
- Funções Reais de Variável Real (FRVR)
- Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI)
- Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL)
- Primitivas e Cálculo Integral (PCI)
- Números Complexos (NC)

Segue-se uma apresentação detalhada de cada um dos domínios.

Capítulo 2 – 10.º ano - Matemática A

O domínio Lógica e Teoria dos Conjuntos pode ser considerado central neste ciclo de estudos, uma vez que reúne temas fundamentais e transversais a todo o Ensino Secundário. Começa-se por introduzir algumas operações sobre proposições, de forma intuitiva e no contexto de uma Lógica bivalente em que valem os Princípios de não contradição e do terceiro excluído. Em seguida, é estudada a quantificação universal e existencial de condições e a relação entre operações sobre condições e sobre os respetivos conjuntos-solução, assunto que já tinha sido visitado, de forma menos específica, no Ensino Básico. É, ainda, a oportunidade para traduzir numa linguagem própria das teorias aqui desenvolvidas algumas técnicas elementares de demonstração, como a prova da igualdade entre conjuntos por dupla inclusão ou a prova de uma implicação pelo contrarrecíproco.

(Programa de Matemática A, pág.9)

2.1. Lógica e Teoria dos Conjuntos (LTC10) – 18 aulas

- Proposições
- Condições e conjuntos

Antes, no Programa, estava previsto: que a Lógica e a Teoria dos Conjuntos fosse um tema transversal no Ensino Secundário. Todas as noções deveriam ser abordadas à medida que fossem consideradas necessárias sem terem uma localização precisa em nenhum dos anos de escolaridade.

No **Programa Novo**, a **Lógica e Teoria de Conjuntos** aparece como um domínio independente o que é justificado pelo facto de a organização do Programa por Metas Curriculares obrigar à explicitação clara de todos os conteúdos.

Ao longo de todo o Ensino Básico, os alunos já aprenderam:

- a representação de conjuntos, a reunião e a interseção de conjuntos, a organização de conjuntos de dados em diagramas de Venn e de Carroll (nos domínio Organização e Tratamento de dados – OTD 1,2 e 3)
- o significado de conjunto-solução e o símbolo " $\Leftrightarrow$ " quando deram Equações Algébricas do 1º grau no 7º ano (ALG 7)
- o vocabulário do método axiomático: teorias; objetos, relações primitivas e axiomas; axiomática de uma teoria; definições, teoremas e demonstrações; condições necessárias e suficientes; aprenderam a utilizar os termos «hipótese» e «tese» de um teorema e o símbolo " $\Rightarrow$ "; lemas e corolários (no 9.º ano, em GM 9)
- a identificar um lugar geométrico como um conjunto de pontos que satisfazem uma determinada propriedade (GM 9).

No 10.º ano, depois de se definir «proposição» e o «princípio da não contradição», definem-se as operações sobre proposições: conjunção, disjunção, implicação e equivalência, agora como operações binárias (cada uma delas transformando um par de proposições numa nova proposição) e a negação como uma operação unária (aplicada apenas a uma proposição). Todas as operações são definidas de modo que é sempre possível determinar o valor lógico do resultado, conhecendo o valor lógico das proposições das quais se parte.
São estabelecidas:

- as prioridades das operações lógicas;
- a propriedade da dupla negação, o princípio do terceiro excluído e o princípio da dupla implicação;
- as propriedades comutativa e associativa da disjunção e da conjunção, a existência de elemento neutro para cada uma delas e a distributividade da conjunção em relação à disjunção e da disjunção em relação à conjunção;
- as primeiras Leis de De Morgan.

Recomenda-se que, ao fazer o estudo destas operações, se reveja a abordagem feita no 9.º ano da noção de condição necessária e suficiente e do uso do símbolo da implicação.

Geometria e Medida GM9 (Metas Curriculares – Ensino Básico, pág.72)

Axiomatização das teorias Matemáticas

1. Utilizar corretamente o vocabulário próprio do método axiomático

1. Identificar uma «teoria» como um dado conjunto de proposições consideradas verdadeiras, incluindo-se também na teoria todas as proposições que delas forem dedutíveis logicamente.

2. Reconhecer, no âmbito de uma teoria, que para não se incorrer em raciocínio circular ou numa cadeia de deduções sem fim, é necessário fixar alguns objetos («objetos primitivos»), algumas relações entre objetos que não se definem a partir de outras («relações primitivas»), e algumas proposições que se consideram verdadeiras sem as deduzir de outras («axiomas»).

3. Designar por «axiomática de uma teoria» um conjunto de objetos primitivos, relações primitivas e axiomas a partir dos quais todos os objetos e relações da teoria possam ser definidos e todas as proposições verdadeiras demonstradas e utilizar corretamente os termos «definição», «teorema» e «demonstração» de um teorema.

4. Saber que os objetos primitivos, relações primitivas e axiomas de algumas teorias podem ter interpretações intuitivas que permitem aplicar os teoremas à resolução de problemas da vida real e, em consequência, testar a validade da teoria como modelo da realidade em determinado contexto.

5. Distinguir «condição necessária» de «condição suficiente» e utilizar corretamente os termos «hipótese» e «tese» de um teorema e o símbolo «$\Rightarrow$».

6. Saber que alguns teoremas podem ser designados por «lemas», quando são considerados resultados auxiliares para a demonstração de um teorema considerado mais relevante e outros por «corolários» quando no desenvolvimento de uma teoria surgem como consequências estreitamente relacionadas com um teorema considerado mais relevante.

As propriedades expressas nos descritores (LTC 10 1.10 a 1.15) podem ser demonstradas elaborando tabelas de verdade ou utilizando argumentos que envolvam as definições das operações e propriedades já verificadas. Os alunos devem contactar com ambos os métodos.

Assim, constituirão uma novidade no Ensino Secundário exercícios do tipo:

3. Prove que as proposições seguintes são verdadeiras, independentemente dos valores lógicos das proposições elementares.
   3.1. $(p \Rightarrow q) \vee (p \vee \sim q)$
   3.2. $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$

(Caderno de Apoio, pág. 5)

Resolução:

3.1. Usando uma tabela de verdade:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\sim q}$	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$	$\boldsymbol{p \vee \sim q}$	$\boldsymbol{(p \Rightarrow q) \vee (p \vee \sim q)}$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V

3.2. Recorrendo a argumentos baseados nas propriedades das operações lógicas envolvidas:

Para que $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$ fosse falsa, o antecedente teria que ser verdadeiro e o consequente falso. Mas se a tiver o valor lógico de verdade, então o valor lógico de $b \Rightarrow a$ não pode ser falso. Logo, não é possível que $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$ seja uma proposição falsa.

Sistematiza-se em seguida a relação entre condições e conjuntos, introduzem-se os quantificadores e as «Segundas Leis de De Morgan». Neste domínio apenas se tratam explicitamente condições com uma só variável.

Também se exploram os **processos de demonstração**, que podem ser exemplificados com inúmeras situações constituindo revisões do Ensino Básico.

Exemplos:

Exemplo de utilização dos quantificadores invocando conhecimentos matemáticos do ensino básico (Caderno de Apoio, LTC10-2.9 página 8):

3. Mostre que as seguintes afirmações são falsas, apresentando um contra-exemplo:
   3.1 Todos os quadriláteros do plano têm diagonais iguais.
   3.2 Todos os números ímpares são primos.
   3.3 Todos os números primos formados por dois algarismos têm os algarismos distintos.

Exemplos do Caderno de Apoio (LTC10-2.19 e 2.20):

1. Justifique que as seguintes proposições são falsas:
   1.1. Qualquer número natural que seja múltiplo de 5 é múltiplo de 10;
   1.2. Qualquer quadrilátero que tenha os quatro lados iguais é um quadrado;
   1.3. Qualquer quadrilátero que tenha os ângulos iguais também tem os lados iguais.

2. Escreva os contra-recíprocos das proposições indicadas no exercício anterior.

3. Demonstre por contra-recíproco que se o quadrado de um dado número natural n é ímpar, n é ímpar.
4. Demonstre por contra-recíproco que se, em dado plano, uma reta r é paralela a outras duas retas s e t, então s e t são paralelas entre si.

Resolver problemas envolvendo operações sobre condições e sobre conjuntos (Caderno de Apoio, LTC10- 3.10, página 12):

3. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 2n - 5 < 10 \wedge n \text{ é ímpar}\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8 = 2x\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 4\};$$

Defina em extensão os conjuntos $A, B, C, A \setminus C$ e $B \cap C$.

Comentário:

Será conveniente os docentes realçarem que a vantagem do contra reciproco é, em muitos casos, tal como nos exemplos acima, ser mais fácil de provar.

Outro exemplo, agora com carácter geométrico:

TEOREMA: Três pontos sobre uma circunferência são três pontos não colineares.

CONTRA RECÍPROCO: Três pontos colineares não podem estar (os três) sobre uma circunferência.

Demonstração do contra reciproco:

A,B,C colineares com B entre A e C. Se existisse uma circunferencia de centro O contendo A,B e C, o ponto O pertenceria a interseção das duas mediatrizes: de AB e de BC.

Se A,B,C são colineares estas mediatrizes são retas paralelas distintas e portanto não tem pontos comuns. Portanto não existe circunferência contendo os três pontos.

Não faz parte do Programa distinguir as designações dos objetos, nem se introduz a noção de expressão designatória.

No 12ºano (no domínio Cálculo Combinatório – CC 12) retomam-se as operações sobre conjuntos e cardinais de conjuntos e demonstram-se as «Leis de De Morgan para conjuntos».

Atualmente (2015-16) no Ensino Superior, na Licenciatura do Curso de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, existe uma disciplina no 1.º semestre do 1.º ano, ***Elementos de Matemática***[11] o que, de algum modo, pode justificar a inclusão destes conteúdos no novo Programa do Ensino Secundário.

Objetivos da Unidade Curricular

O objectivo desta disciplina é familiarizar os alunos com o raciocínio dedutivo e com a linguagem e as construções básicas da teoria dos conjuntos. Não se trata de uma disciplina em que se desenvolva algum tópico concreto da matemática, mas sim de uma disciplina cujo objectivo é ensinar os instrumentos que se usam no desenvolvimento de qualquer tópico concreto da matemática.

Os alunos deverão ficar aptos a perceber a estratégia de uma demonstração, a fazer algumas demonstrações e a utilizar os conceitos de uma forma autónoma em qualquer contexto matemático.

Pré-requisitos

Sem precedências

Conteúdos

Lógica e Teoria dos Conjuntos.

Métodos de Demonstração.

Relações e Aplicações.

Indução Matemática.

Descrição detalhada dos conteúdos programáticos

Componente Teórica
Lógica e Teoria dos Conjuntos. Conectivos proposicionais. Argumentos e regras de inferência. Tabelas de verdade. Quantificação existencial e universal. Conjuntos: definições por extensão e por compreensão, princípio da extensionalidade, conjunto vazio e a noção de subconjunto. Operações básicas sobre conjuntos e suas propriedades: união, intersecção, complementação e conjunto das partes. **Métodos de Demonstração.** Distinção entre a hipótese e a tese de um teorema. Estratégias para demonstrar um teorema quando a tese (respectivamente, uma premissa) é uma conjunção, disjunção, negação, implicação, equivalência, asserção existencial ou uma asserção universal. Demonstrações de existência e unicidade. Método da contraposição. Reductio ad absurdum. **Relações e Aplicações.** Pares ordenados e produtos cartesianos. Relações de equivalência, classes de equivalência e partições. Aplicações e composição de aplicações. Aplicações injectivas, sobrejectivas e bijectivas. Aplicação inversa. **Indução Matemática.** Demonstrações por indução matemática. Indução completa. Princípio do mínimo. Exemplos: divisão inteira com resto; infinitude dos números primos. Definições por recorrência.

[11] https://www.fc.ul.pt/pt/disciplinas/201516/13509-elementos-de-matematica

Eis um desafio que pode ser proposto e que vem a propósito no final deste domínio:

Batalha Geométrica

Quatro amigos meus descobriram o jogo *Batalha Geométrica* e resolveram fazer um campeonato entre eles, com atribuição final de medalhas de ouro, prata e bronze para os três primeiros classificados.

Quando os voltei a encontrar perguntei-lhes qual tinha sido a classificação final. Eis o que me disseram:

Manuela: «Fiquei à frente do Eduardo. A Florinda ficou atrás de mim.»

Rita: «Fiquei em primeiro. O Eduardo não teve nenhuma medalha.»

Florinda: «Nem a Manuela nem o Eduardo receberam a medalha de ouro. Quem ficou em primeiro fui eu.»

O Eduardo manteve-se calado.

Descobri depois que não houve empates na classificação final e que, das duas frases ditas por cada um, uma era verdadeira e a outra falsa.

A quem foram atribuídas as medalhas?

(in revista *Educação e Matemática* n.º 132, página 10, problema de José Paulo Viana)

<u>Sugestão de resolução:</u>

A 1.ª frase da Florinda tem de ser Verdadeira (rapidamente se conclui que nem a Manuela nem o Eduardo podem ficar em 1.º lugar, para se respeitar a regra e haver compatibilidade nos discursos). Logo a 2ª é Falsa.

Assim, foi a Rita quem ficou em 1º.

F1-V

F2-F

	F1	F2	R1	R2	M1	M2
1	V	F	V	F	V	F
2	V	F	V	F	F	V

Basta analisar os casos 1 e 2.

O 1º caso é impossível, porque R2 é Falsa:

1º-Rita
2º-Florinda
3º-Manuela
4º-Eduardo

Logo as medalhas foram atribuídas de acordo o caso 2.

1º-Rita
2º-Eduardo
3º-Manuela
4º-Florinda

No domínio da Álgebra, completa-se, de forma sistemática, o estudo dos radicais, o que permite estender adequadamente a noção de potência a expoentes racionais e mostrar que as respetivas propriedades algébricas se estendem a potências com este conjunto alargado de expoentes. Neste domínio ainda se retoma o estudo iniciado no Básico acerca do anel dos polinómios de coeficientes reais. É definida a divisão euclidiana e apresentado o Teorema do resto, que permite, em particular, provar que $a \in \mathbb{R}$ *é raiz de um polinómio* P *se e somente se* P *é divisível por* $x - a$ *. É ainda abordada a noção de multiplicidade algébrica de uma raiz, com aplicações à fatorização de polinómios.*

(Programa de Matemática A, pág.9)

2.2. Álgebra (ALG10) – 30 aulas

- Radicais
- Potências de expoente racional
- Polinómios

No 2º ciclo (em ALG6) os alunos aprendem a definição de potência de expoente natural (e base racional positiva), a prioridade das operações e as regras operatórias das potências.

No 3º ciclo (em ALG7 e ALG8) estende-se a definição dada às potências de base racional e expoente inteiro. As definições surgem como uma convenção para que as propriedades já conhecidas se mantenham válidas. Surgem as noções de raiz quadrada e raiz cúbica e o produto e o quociente entre estas raízes.

Agora, a definição é mais uma vez ampliada, desta vez a potências de expoente racional, para manter as propriedades.

$7^{\frac{3}{5}} = ?$

Para manter a igualdade, $(a^p)^q = a^{p\times q}$

$\left(7^{\frac{3}{5}}\right)^5 = 7^{\frac{3}{5}\times 5} = 7^3 \Leftrightarrow \left(7^{\frac{3}{5}}\right) = \sqrt[5]{7^3}$

E assim, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Define-se raiz n-ésima de um número real e estabelecem-se as propriedades algébricas dos radicais.

Antes, no 11ºano, estava previsto:

■ Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos. Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário. Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).	No caso da função inversa os estudantes precisam de analisar os casos em que será possível inverter uma função (poderá ser introduzida a noção de injectividade, apenas como noção auxiliar) e devem constatar a relação entre os gráficos de uma função e da sua inversa. Será necessário introduzir a noção de raiz índice n. Tal deverá ser feito de forma algébrica. Só depois se falará na função inversa da função potência. Grau de dificuldade a não ultrapassar: $\sqrt{x+3}$, $\sqrt[3]{x+4}$ Uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação de uma elipse a partir da sua propriedade focal (dados os focos).

(Página 7 do Programa Antigo do 11.º ano)

Agora, a resolução de operações com radicais e com potências envolve a racionalização de denominadores da forma $a\sqrt[n]{b}$ ou $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ (a e c números inteiros, b, d, n números naturais, $n > 1$).

Os alunos devem aprender a racionalizar denominadores para poderem localizar, de forma correta, a fração na reta real o que também facilita o cálculo de valores aproximados sem terem de recorrer à calculadora.

Na lecionação, no anterior Programa, a maioria dos docentes já ensinava a racionalizar frações do tipo:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \quad ; \; \frac{5}{2-\sqrt{3}} \; \text{ ou, de uma maneira geral,} \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Agora, para além desses exercícios, estão previstos outros de resolução mais elaborada:

3. **Escreva cada uma das seguintes expressões na forma: $a+b\sqrt{c}$, com $a,b\in\mathbb{Z}$ e $c\in\mathbb{N}$.

3.1 $\sqrt{29+12\sqrt{5}}$

3.2 $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

(Caderno de Apoio do 10.º ano, pág.17)

3.1. $\sqrt{29+12\sqrt{5}}=\sqrt{9+2\times3\times\left(2\sqrt{5}\right)+20}=\sqrt{3^2+2\times3\times\left(2\sqrt{2}\right)+\left(2\sqrt{5}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(3+2\sqrt{5}\right)^2}=3+2\sqrt{5}$, uma vez que $3+2\sqrt{5}>0$.

3.2. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{9-2\times3\times\sqrt{2}+2}=\sqrt{3^2-2\times3\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=3-\sqrt{2}$

Os conteúdos sobre polinómios não sofrem alteração.

- Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini;
- Divisibilidade de polinómios; Teorema do resto;
- Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades;
- Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinómios, o Teorema do resto e a fatorização de polinómios;
- Resolução de problemas envolvendo a determinação do sinal e dos zeros de polinómios.

Do Programa do Ensino Básico (em ALG8), fazem parte:

- Monómios; fatores numéricos, constantes e varáveis ou indeterminadas; parte numérica ou coeficiente; monómio nulo e monómio constante; parte literal;
- Monómios semelhantes; forma canónica de um monómio; igualdade de monómios;
- Grau de um monómio;
- Soma algébrica e produto de monómios;
- Polinómios; termos; variáveis ou indeterminadas, coeficientes; forma reduzida; igualdade de polinómios; termo independente; polinómio nulo;
- Grau de um polinómio;
- Soma algébrica e produto de polinómios;
- Casos notáveis da multiplicação como igualdades entre polinómios;
- Problemas associando polinómios a medidas de áreas e volumes, interpretando geometricamente igualdades que os envolvam;
- Problemas envolvendo polinómios, casos notáveis da multiplicação de polinómios e fatorização.

Comentário:

Esta é uma parte do Programa que envolve muito cálculo.

Será conveniente e motivador para os alunos fazer, nesta altura, uma breve referência histórica. A construção de um retângulo de ouro (a partir de um quadrado) e a determinação do número de ouro (=base/altura do retângulo) é um bom ponto de partida e é sugestivo para os alunos fazerem um pequeno trabalho de pesquisa. A verificação de algumas propriedades do número de ouro é uma aplicação que torna interessantes os cálculos.

$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Por exemplo, ϕ é solução da equação $x - 1 = \frac{1}{x}\ , x \neq 0$;

$\phi + 1 = \phi^2$, etc.

Pode ensinar-se a construir um pentágono "regular" com uma tira retangular de papel (fazendo apenas um nó) e verificar que a diagonal do pentágono é igual a ϕ.

E, para exercitar mais (considerando que a medida do comprimento da aresta do poliedro é a unidade):

$\textit{Área do dodecaedro} = \dfrac{15\phi}{\sqrt{3-\phi}} = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

$\textit{Volume do dodecaedro} = \dfrac{5\phi^3}{6-2\phi} = \dfrac{1}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right)$

$\textit{Volume do icosaedro} = \dfrac{5\phi^2}{6} = \dfrac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)$

Para realçar a importância da justificação do último passo na resolução de 3.1 (ou outra situação semelhante), é adequado pedir aos alunos que descubram o erro na "demonstração" para provar que $2 = 4$

$$4 - 12 = 16 - 24$$
$$\Leftrightarrow 4 - 12 + 9 = 16 - 24 + 9$$
$$\Leftrightarrow (2-3)^2 = (4-3)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(2-3)^2} = \sqrt{(4-3)^2}$$
$$\Leftrightarrow 2 - 3 = 4 - 3$$
$$\Leftrightarrow 2 = 4$$

Atendendo à idade dos alunos e à transição de ciclos (que é muitas vezes acompanhada da adaptação a uma Escola nova), é importante "adocicar" as partes mais densas do currículo, investir na relação pedagógica e cativar os alunos para a aprendizagem desde o início do ciclo.

O 10.º ano é igualmente a ocasião para se desenvolver o estudo da Geometria Analítica iniciado no Ensino Básico com a introdução dos referenciais cartesianos planos e o estudo das equações cartesianas das retas. Fixada uma unidade de comprimento e um referencial ortonormado do plano, introduz-se o cálculo da medida da distância entre pontos a partir das respetivas coordenadas, o que constitui um passo essencial no sentido de tratar, de forma eficaz, problemas da Geometria com instrumentos puramente analíticos. Dá-se especial relevo ao estudo das equações cartesianas de circunferências e elipses, cuja definição geométrica a partir da propriedade focal é apresentada neste domínio. No que diz respeito ao cálculo vetorial, para além das operações de adição de vetores e de adição de um ponto com um vetor, que eram já conhecidas, define-se agora a diferença de vetores, a multiplicação de um vetor por um escalar, a noção de norma, fixada uma unidade de comprimento, e, fixado além disso um referencial ortonormado, introduzem-se as coordenadas de um vetor, tratando-se em seguida também de um ponto de vista analítico todas estas noções. Depois de se apresentar o conceito de vetor diretor, introduzem-se as equações vetoriais e os sistemas de equações paramétricas de retas do plano. Finalmente, é feita uma primeira abordagem aos referenciais cartesianos do espaço, generalizando-se algumas das noções já estudadas no plano.

(Programa de Matemática A, pág.9 e 10)

2.3. Geometria Analítica (GA10) – 54 aulas

- Geometria analítica no plano
- Cálculo vetorial no plano
- Geometria analítica no espaço
- Cálculo vetorial no espaço

O estudo da Geometria analítica no plano inicia-se com as definições de referencial ortonormado e a distância entre dois pontos.

Retoma-se a primeira abordagem à Geometria analítica no plano, feita no 5.º ano do Ensino Básico (OTD5-1.1 a 1.3):

1. Construir gráficos cartesianos

1. Identificar um «referencial cartesiano» como um par de retas numéricas não coincidentes que se intersetam nas respetivas origens, das quais uma é fixada como «eixo das abcissas» e a outra como «eixo das ordenadas» (os «eixos coordenados»), designar o referencial cartesiano como «ortogonal» quando os eixos são perpendiculares e por «monométrico» quando a unidade de comprimento é a mesma para ambos os eixos.
2. Identificar, dado um plano munido de um referencial cartesiano, a «abcissa» (respetivamente «ordenada») de um ponto P do plano como o número representado pela interseção com o eixo das abcissas (respetivamente ordenadas) da reta paralela ao eixo das ordenadas (respetivamente abcissas) que passa por P e designar a abcissa e a ordenada por «coordenadas» de P.
3. Construir, num plano munido de um referencial cartesiano ortogonal, o «gráfico cartesiano» referente a dois conjuntos de números tais que a todo o elemento do primeiro está associado um único elemento do segundo, representando nesse plano os pontos cujas abcissas são iguais aos valores do primeiro conjunto e as ordenadas respetivamente iguais aos valores associados às abcissas no segundo conjunto.

(Metas Curriculares para o Ensino Básico, pág.36)

Para chegar à definição de distância entre dois pontos, pode utilizar-se um exemplo análogo a:

1. Considere, num referencial ortonormado do plano, os pontos $A(3,-2)$ e $B(-1,1)$.
   1.1. Represente os pontos A e B e trace as retas paralelas aos eixos coordenados que contêm A ou B, por forma a construir um retângulo do qual $[AB]$ é uma diagonal.
   1.2. Determine a distância entre os pontos A e B utilizando o teorema de Pitágoras.

(Caderno de Apoio do 10.º ano, pág. 21)

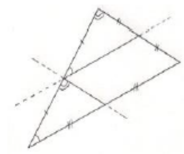
Isto podia sugerir que o desenvolvimento deste domínio era semelhante ao adotado no Antigo Programa, contudo quando se definem as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, retoma-se a geometria sintética do Ensino Básico. Esta indicação é explícita no descritor GA10-1.4.

4. +Reconhecer, utilizando argumentos geométricos baseados no Teorema de Tales ou em consequências conhecidas deste Teorema, que, dado um plano munido de um referencial ortonormado e dois pontos $A(a_1,a_2)$ e $B(b_1,b_2)$ pertencentes a esse plano, as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ são $\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$.

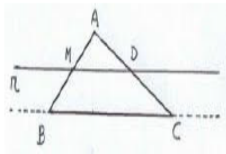
Nesta abordagem, o Teorema de Pitágoras é visto como uma consequência do Teorema de Tales.

Convém recordar o que foi dado no 7.º ano sobre este assunto:

5. Decompor um dado triângulo em dois triângulos e um paralelogramo traçando as duas retas que passam pelo ponto médio de um dos lados e são respetivamente paralelas a cada um dos dois outros, justificar que os dois triângulos da decomposição são iguais e concluir que todos os lados do triângulo inicial ficam assim bissetados.



6. Reconhecer, dado um triângulo $[ABC]$, que se uma reta r intersetar o segmento $[AB]$ no ponto médio M e o segmento $[AC]$ no ponto D, que $\overline{AD} = \overline{DC}$ quando (e apenas quando) r é paralela a BC e que, nesse caso, $\overline{BC} = 2\overline{MD}$.



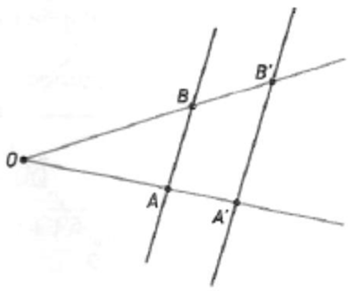
7. Enunciar o Teorema de Tales e demonstrar as condições de proporcionalidade nele envolvidas por argumentos geométricos em exemplos com constantes de proporcionalidade racionais.

(Metas Curriculares para o Ensino Básico, pág. 51, GM7- 4.5 a 4.7)

Teorema de Tales

Se AB e $A'B'$ forem retas paralelas intersetando respetivamente as retas AO e OB nos pontos indicados, então têm lugar as proporções:

- $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
- $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AA'}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{BB'}}$
- $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{AA'}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{BB'}}$

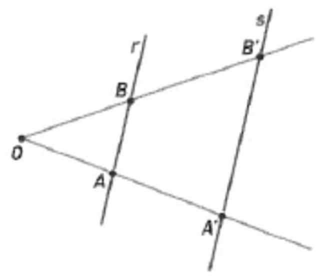


Recíproco do Teorema de Tales

Se duas retas r e s dividem duas retas concorrentes em segmentos de retas proporcionais, então as retas r e s são paralelas.

Se $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{OB}}$,

então $r//s$.

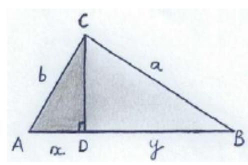


e, no 8ºano:

Teorema de Pitágoras

1. *Relacionar o teorema de Pitágoras com a semelhança de triângulos*

   1. Demonstrar, dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C, que a altura $[CD]$ divide o triângulo em dois triângulos a ele semelhantes, tendo-se $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$.
   2. Reconhecer, dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C e de altura $[CD]$, que os comprimentos $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $x = \overline{AD}$, $y = \overline{DB}$ satisfazem as igualdades $b^2 = xc$ e $a^2 = yc$ e concluir que a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa e designar esta proposição por «Teorema de Pitágoras».



   3. Reconhecer que um triângulo de medida de lados a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$ é retângulo no vértice oposto ao lado de medida c e designar esta propriedade por «recíproco do Teorema de Pitágoras».

(Metas Curriculares para o Ensino Básico, pág. 68, GM8- 1.1 a 1.3)

Podemos tomar como exemplo da meta GA10-1.4:

1. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, os pontos de coordenadas $A(1,1)$, $B(4,6)$ e $C(4,1)$.
   1.1 Determine as coordenadas do ponto médio D do segmento de reta $[AC]$.
   1.2 Considere a reta paralela ao eixo das ordenadas que passa pelo ponto D e a respetiva interseção M com o segmento de reta $[AB]$. Justifique, utilizando o Teorema de Tales, que M é o ponto médio de $[AB]$ e indique a abcissa de M.
   1.3 Calcule a ordenada de M.

(Caderno de Apoio do 10.º ano, pág. 21)

Proposta de resolução[12]:

1.1) Os pontos $A(1,1)$ e $C(4,1)$ pertencem à reta de equação $y = 1$. Assim a ordenada do ponto médio de $[AC]$ terá de ser 1.

Sejam A', C' e D' as projeções ortogonais sobre Ox dos pontos A, C e D, respetivamente.

Se a abcissa de D' for d, tem-se $d - 1 = 4 - d \Leftrightarrow d = \frac{5}{2}$

e logo D tem de coordenadas $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$

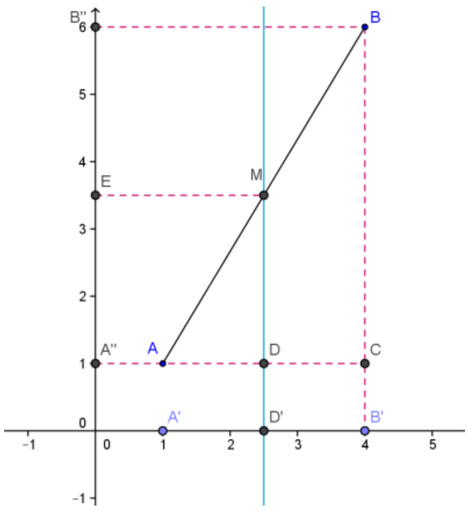
1.2) A abcissa do ponto D' é $\frac{5}{2}$

Aplicando o Teorema de Tales, tem-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = 2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\overline{AM}$$

Logo M é o ponto médio de $[AB]$

A abcissa de M é igual à de D' uma vez que D' é a projeção ortogonal de M sobre o eixo Ox.



1.3) Como consequência do Teorema de Tales, tem-se

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = 2 \Leftrightarrow \overline{CB} = 2\overline{DM}$$

ou seja

$$\overline{A''B''} = 2\overline{A''E}$$

E é o ponto médio de $[A''B'']$, sendo a ordenada de E dada por $\frac{1+6}{2}$, ou seja $\frac{7}{2}$

[12] A complexidade desta resolução deve-se à necessidade de concretizar a meta GA 10 - 1.4.

Assim, as coordenadas de M são $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$

Antes:

1.1) $M_{[AC]}=\left(\frac{1+4}{2},\frac{1+1}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},1\right)$

1.2) $Este\ enunciado\ não\ era\ do\ âmbito\ do\ Programa$

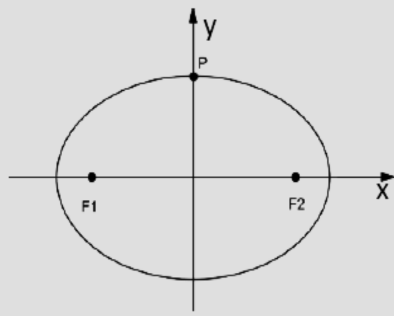
1.3) $y_{M_{[AB]}}=\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2}$

Segue-se a determinação das equações cartesianas da mediatriz de um segmento de reta, na forma reduzida e na forma $x=k$ (se o segmento de reta for paralelo ao eixo das abcissas) e da equação reduzida da circunferência, como era habitual.

Depois aparece um **conteúdo novo**: a **definição de elipse e respetiva equação cartesiana**; relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal (descritores GA10-1.8 a 1.10).

Exemplos do Caderno de Apoio do 10.º ano, pág. 22:

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado e dado $c>0$, a elipse de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ e de eixo maior $2a$ $(a>c>0)$. Seja P o ponto de interseção da elipse com o semi-eixo positivo das ordenadas.
   1.1. Justifique que $\overline{F_1P}=\overline{F_2P}$.
   1.2. Indique, justificando, a medida comum de $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$.
   1.3. Conclua que $\overline{OP}=\sqrt{a^2-c^2}$.



Proposta de resolução:

1.1) $P(0,y), y>0$

$$\overline{F_1P}=\sqrt{(-c+0)^2+(0+y)^2}=\sqrt{c^2+y^2}$$

$$\overline{F_2P}=\sqrt{(c+0)^2+(0+y)^2}=\sqrt{c^2+y^2}$$

Logo, $\overline{F_1P} = \overline{F_2P}$

1.2) Como P é um ponto da elipse,

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a \underset{1.1}{\Leftrightarrow} 2\,\overline{F_1P} = 2a \Leftrightarrow \overline{F_1P} = a$$

ou seja, $\overline{F_1P} = \overline{F_2P} = a$

1.3) Considerando o triângulo retângulo em O, $[OPF_2]$, tem-se, pelo Teorema de Pitágoras,

$$(\overline{OP})^2 + (\overline{OF_2})^2 = (\overline{PF_2})^2 \Leftrightarrow (\overline{OP})^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow \overline{OP} = \sqrt{a^2 - c^2}$$

1. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $F_1(-4{,}0)$ e $F_2(4{,}0)$.
   1.1. Qual o valor que deve tomar o número real d por forma que um ponto $P(x,y)$ pertença à elipse de focos F_1 e F_2 e semieixo maior a, $(a > 4)$ quando e apenas quando $d = \sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$?
   1.2. *Considere que $a = 5$.
   Mostre que um ponto $P(x,y)$ pertence à elipse referida na alínea anterior quando e apenas quando $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
   1.3. Tendo em conta a alínea 1.2, calcule as coordenadas dos pontos A_1 e A_2 em que a elipse interseta o eixo das abcissas, as coordenadas dos pontos B_1 e B_2 em que a elipse interseta o eixo das ordenadas e o eixo menor $b = \overline{B_1B_2}$.
   1.4. Verifique, neste exemplo, que $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, onde $c = \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$ é a semidistância focal.

Proposta de resolução:

1.1) Se $P(x,y)$ pertence à elipse, verifica-se que $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2a$

Logo $d = 2a$

1.2) Considerando $a = 5$, tem-se que

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

$$(x+4)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + (x-4)^2 + y^2$$

$$20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 100 + (x-4)^2 - (x+4)^2$$

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=5-\frac{16}{20}x$$

$$(x-4)^2+y^2=\left(5-\frac{4}{5}x\right)^2$$

$$x^2-\frac{16}{25}x^2+y^2=25-16$$

$$\frac{9}{25}x^2+y^2=9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

1.3) Se A_1 e A_2 são pontos do eixo das abcissas, tem-se $A_1=(x_1,0)$ e $A_2=(x_2,0)$ e como pertencem à elipse, as suas coordenadas terão de ser soluções da equação

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}=0 \Leftrightarrow x=-5 \vee x=5$$

Assim, o ponto do semieixo negativo das abcissas será $A_1=(-5{,}0)$ e o ponto do semieixo positivo das abcissas será $A_2=(5{,}0)$

De modo semelhante se conclui que as ordenadas de $B_1=(0,y_1)$ e $B_2=(0,y_2)$ têm de ser as soluções de

$$\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow y=-3 \vee y=3$$

Assim, o ponto do semieixo negativo das ordenadas será $B_1=(0,-3)$ e o ponto do semieixo positivo das ordenadas será $B_2=(0{,}3)$

$$2b=\overline{B_1B_2}=\sqrt{(3+3)^2}=6$$

1.4) $c=\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}=\frac{\sqrt{(4+4)^2}}{2}=4$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$$

Este domínio completa-se com a identificação e/ou definição, utilizando equações e inequações cartesianas, de conjuntos de pontos do plano. Apenas se pretende um reconhecimento a nível elementar, recorrendo à intuição geométrica, à semelhança do que acontecia no Programa Antigo.

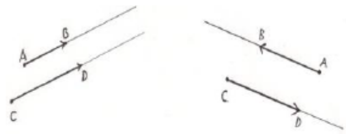
Sobre o **cálculo vetorial** no plano, importa saber que a noção de segmento orientado já é conhecida desde o 2.º ciclo (NO6-3)

1. Identificar um segmento orientado como um segmento de reta no qual se escolhe uma origem de entre os dois extremos e representar por $[A, B]$ o segmento orientado $[AB]$ de origem A, designando o ponto B por extremidade deste segmento orientado.

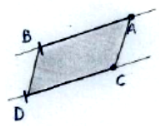
No 3.º ciclo, no 8.º ano (GM8-3) aparece o **vetor** como uma entidade matemática associada a um conjunto de segmentos orientados que são todos equipolentes entre si e que pode ser representado por qualquer um deles.

1. Identificar segmentos orientados como tendo «a mesma direção» quando as respetivas retas suportes forem paralelas ou coincidentes.

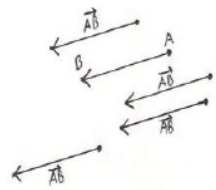
2. Identificar segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ como tendo «a mesma direção e sentido» ou simplesmente «o mesmo sentido» quando as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{C}D$ tiverem o mesmo sentido e como tendo «sentidos opostos» quando tiverem a mesma direção mas não o mesmo sentido.



5. **Identificar segmentos orientados como «equipolentes» quando tiverem a mesma direção, sentido e comprimento e reconhecer que os segmentos orientados $[A, B]$ e $[C, D]$ de retas suportes distintas são equipolentes quando (e apenas quando) $[ABDC]$ é um paralelogramo.**



6. Saber que um «vetor» fica determinado por um segmento orientado de tal modo que segmentos orientados equipolentes determinam o mesmo vetor e segmentos orientados não equipolentes determinam vetores distintos, designar esses segmentos orientados por «representantes» do vetor e utilizar corretamente os termos «direção», «sentido» e «comprimento» de um vetor.



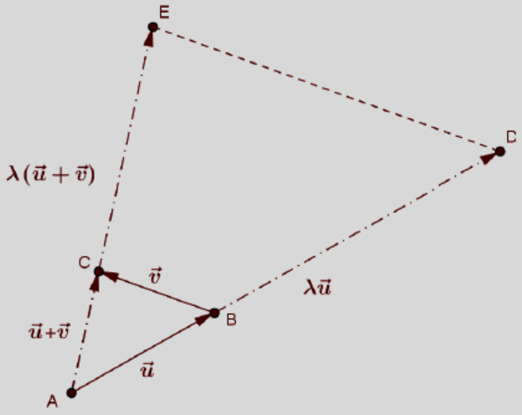
7. Representar o vetor determinado pelo segmento orientado $[A, B]$ por $\overrightarrow{AB}$.

Também já são conhecidos do 8.º ano, vetores colineares e simétricos, soma de um ponto com um vetor e translação determinada por um vetor, composição de translações, adição algébrica de vetores e respetivas propriedades.

Agora, no 10.º ano, define-se norma de um vetor e introduzem-se novas operações nomeadamente o produto de um vetor por um escalar e a subtração de vetores.

Mas, de novo, a demonstração da distributividade da multiplicação de um escalar em relação à adição de vetores (GA10-3.6) deve ser feita com recurso ao Teorema de Tales:

1. *Considere dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não colineares e $\lambda > 0$; pretendemos provar que $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$. Para o efeito, fixado um ponto A do plano, seja $B = A+\vec{u}$, $C = B+\vec{v}$ e $D = A+\lambda\vec{u}$, como se ilustra na figura junta.



   1.1. Justifique que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}+\vec{v}$.
   1.2. Sendo $E = A+\lambda(\vec{u}+\vec{v})$ e utilizando o Teorema de Tales, justifique que as retas BC e DE são paralelas.
   1.3. Conclua da alínea anterior que $\overline{DE} = \lambda\overline{BC}$.
   1.4. Justifique que as semirretas $\dot{B}C$ e $\dot{D}E$ têm o mesmo sentido e conclua, utilizando também as alíneas anteriores, que $\overrightarrow{DE} = \lambda\overrightarrow{BC} = \lambda\vec{v}$. [Sugestão: para comparar os sentidos das referidas semirretas note que, por construção, os pontos C e E estão numa mesma semirreta de origem no ponto A da reta BD.]
   1.5. Conclua finalmente que $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$.

(Caderno de Apoio do 10.º ano, pág. 31)

Só depois se passa a identificar um vetor através das suas coordenadas num referencial ortonormado $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ em que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ constituem uma base do espaço vetorial vos vetores do plano.

O desenvolvimento dado a partir daqui é idêntico ao que já se fazia.

- Vetor-posição de um ponto e respetivas coordenadas;
- Coordenadas da soma e da diferença de vetores; coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; relação entre as coordenadas de vetores colineares;
- Vetor diferença de dois pontos; cálculo das respetivas coordenadas; coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor;
- Cálculo da norma de um vetor em função das respetivas coordenadas;

- Vetor diretor de uma reta; relação entre as respetivas coordenadas e o declive da reta;
- Paralelismo de retas e igualdade do declive;
- Equação vetorial de uma reta;
- Sistema de equações paramétricas de uma reta;
- Resolução de problemas envolvendo a determinação de coordenadas de vetores no plano, a colinearidade de vetores e o paralelismo de retas do plano.

Na geometria analítica no espaço, começa-se com as definições rigorosas de: referencial cartesiano (ou simplesmente referencial ortonormado), projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta, eixos coordenados, planos coordenados e coordenadas de um ponto no espaço (descritores GA10-7.1 a 7.5).

Segue-se a ampliação ao espaço da noção de distância entre dois pontos, das equações e inequações cartesianas de subconjuntos de pontos e das operações com vetores.

Comentário:

Neste Novo Programa, a Geometria euclidiana é “recuperada”. Os conceitos básicos nos domínios que envolvem geometria são sempre demonstrados utilizando princípios da geometria sintética e só depois se faz a passagem à geometria analítica. Assim, neste contexto, o Teorema de Tales parece ser o Teorema que se destaca neste Programa e o Teorema de Pitágoras perde importância, relativamente à que tinha no Programa Antigo.

Aparece o estudo da elipse, da respetiva equação cartesiana e de algumas das suas propriedades, deixando de ter o carácter facultativo que tinha no anterior Programa (ver abaixo) e onde a elipse era vista como uma “circunferência achatada” num dos seus eixos (diâmetros).

No 10.º ano:

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
(*) Referência à elipse como deformação da circunferência.	A equação da elipse deve aparecer a partir da circunferência por meio de uma mudança afim de uma das coordenadas.

No 11.º ano:

Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).	Uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação de uma elipse a partir da sua propriedade focal (dados os focos).

No entanto, continua a vir a propósito uma breve alusão às aplicações das elipses (e das suas propriedades) nos objetos utilizados no nosso quotidiano, assim como uma referência histórica ao estudo das cónicas.

O estudo da Geometria Analítica continua no 11.º ano.

Inicia-se o domínio Funções Reais de Variável Real com alguns conceitos gerais sobre funções, como a injetividade, a sobrejetividade ou a restrição de uma função a um dado conjunto e definem-se as noções de composição de funções e de função inversa de uma função bijetiva. Em seguida, estabelecem-se relações entre propriedades de funções reais de variável real, como a paridade e simetrias dos respetivos gráficos. Estudam-se ainda as transformações geométricas dos gráficos de funções obtidas através da adição ou da multiplicação das variáveis dependente ou independente de uma dada função por uma constante. Termina-se este domínio de conteúdos com alguns aspetos gerais das funções reais de variável real, como a monotonia, o sentido de concavidade do respetivo gráfico ou as noções de extremo relativo e absoluto.

(Programa de Matemática A, pág.10)

2.4. Funções Reais de Variável Real (FRVR10) – 58 aulas

- Generalidades acerca de funções
- Generalidades acerca de funções de variável real
- Monotonia, extremos e concavidade
- Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos
- Resolução de problemas

Antes

O Tema correspondente a este domínio englobava: funções e gráficos de funções; funções polinomiais e a função módulo.

Era feito o estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica.

A sequência dos conteúdos passava pelo estudo da função quadrática, da função módulo, de funções polinomiais de grau 3 e 4, pela decomposição de polinómios em fatores (regra de Ruffini) e pela resolução de problemas.

Também era feita a análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções definidas por

$$y = f(x) + a,\ y = f(x + a),\ y = af(x),\ y = f(ax),\ y = |f(x)|$$

com *a* positivo ou negativo, descrevendo o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

Agora, fazem parte do Ensino Básico

• No 7ºano, no domínio **Funções**, Sequências e Sucessões (FSS7)

Definição de função
- Função ou aplicação f de A em B; domínio e contradomínio; igualdade de funções;
- Pares ordenados; gráfico de uma função; variável independente e variável dependente;
- Funções numéricas;
- Gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica; equação de um gráfico cartesiano.

Operações com funções numéricas
- Adição, subtração e multiplicação de funções numéricas e com o mesmo domínio; exponenciação de expoente natural de funções numéricas;
- Operações com funções numéricas de domínio finito dadas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos;
- Funções constantes, lineares e afins; formas canónicas, coeficientes e termos independentes; propriedades algébricas e redução à forma canónica;
- Funções de proporcionalidade direta;
- Problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta.

• No 8ºano (FSS8)

Gráficos de funções afins
- Equação de reta não vertical e gráfico de função linear ou afim;
- Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical;
- Relação entre declive e paralelismo;
- Determinação do declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas;
- Equação de reta vertical;
- Problemas envolvendo equações de retas.

• No 9ºano (FSS9)

Funções algébricas
- Funções de proporcionalidade inversa; referência à hipérbole;
- Problemas envolvendo funções de proporcionalidade inversa;
- Funções da família $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$;

- Conjunto-solução da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ como interseção da parábola de equação $y = ax^2$ com a reta de equação $y = -bx - c$.

Assim, depois de uma breve revisão do que foi dado no 7ºano, nas **generalidades acerca de funções**, define-se

– Produto cartesiano de conjuntos
– Gráfico de uma função
– Restrição de uma função
– Imagem de um conjunto por uma função
– Função injetiva, **sobrejetiva e bijetiva**
– **Composição de funções**
– **Função inversa de uma função bijetiva**

Estes assuntos aparecem agora no 10ºano (no anterior Programa só se abordavam no 11ºano)

Nas **generalidades acerca de funções reais de variável real**, define-se

– Função real de variável real
– Expressão analítica de uma função
  - Paridade de uma função
– Simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares
– **Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa**
– **Relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções** $\boldsymbol{af(x), f(bx), f(x+c), f(x)+d, com\ a, b, c, d} \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}$

Esta relação deixa de ser intuitiva. Está agora perfeitamente definida e deve ser justificada analiticamente.

11. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) , por «contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente a» a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (x, ay).
12. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a.

13. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente a» a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (ax, y).
14. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_{g=}\left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.

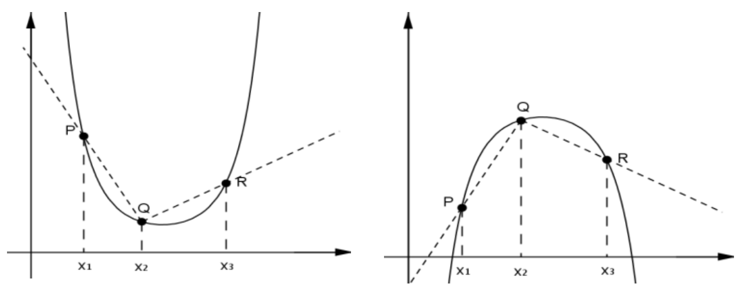
(Metas Curriculares de Matemática A, pág.16, FRVR10 - 2.11 a 2.14)

Em **monotonia, extremos e concavidade**, definem-se

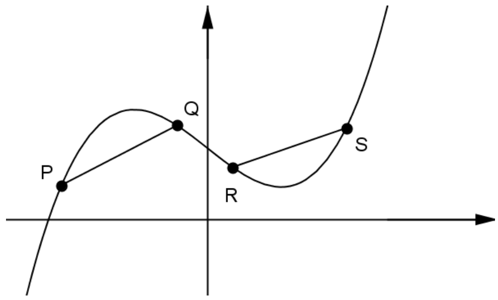
– Funções estritamente crescentes (e estritamente decrescentes), crescentes em sentido lato (e decrescentes em sentido lato), intervalos de monotonia de uma função real de variável real e particulariza-se para o caso das funções afins e para o caso das funções quadráticas
– Função majorada, minorada e limitada
– Extremos absolutos
– **Vizinhança de um número real** e extremos relativos
– **Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real**

A novidade no Programa de 2014 está na formalização da definição:

6. Identificar, dada uma função real de variável real f, o gráfico de f como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para cima» (respetivamente como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para baixo») num dado intervalo $I \subset D_f$ se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior (respetivamente superior) ao da reta QR.



7. Saber que uma função real de variável real tem a concavidade (estritamente) voltada para cima (respetivamente para baixo) num dado intervalo $I \subset D_f$ se e somente se dados quaisquer dois pontos P e Q do gráfico, de abcissas em I, a parte do gráfico de f de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q ficar "abaixo" (respetivamente "acima") do segmento de reta $[PQ]$.



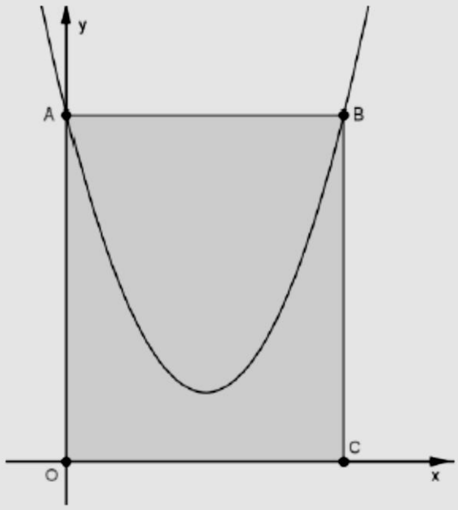
(Metas Curriculares de Matemática A, pág.18, FRVR10 – 4.6 e 4.7)

Segue-se depois o estudo de

- Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas
- Funções definidas por ramos
- Funções definidas por $f(x) = a|x-b| + c \ \ (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$
- **Funções $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt[3]{x}$ enquanto funções inversas**
- **Domínio e representação gráfica de funções definidas por $f(x) = a\sqrt{x-b} + c$ e $f(x) = a\sqrt[3]{x-b} + c, \ a \neq 0$**
- **Funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais até ao 3º grau, módulos e radicais quadráticos e cúbicos.**
- **Operações algébricas sobre funções e determinação do respetivo domínio.**

Exemplos de exercícios apresentados no Caderno de Apoio (englobam conteúdos que antes eram dados no 11.º ano; **continua a ser exigido o uso da calculadora gráfica**):

4. Considere a função f definida por $f(x) = (x-2)^2 + 1$ e representada na figura num referencial cartesiano.
O quadrilátero $[OABC]$ é um retângulo, sendo A o ponto interseção do gráfico de f com o eixo Oy, B um ponto do gráfico de f e C um ponto do eixo Ox.



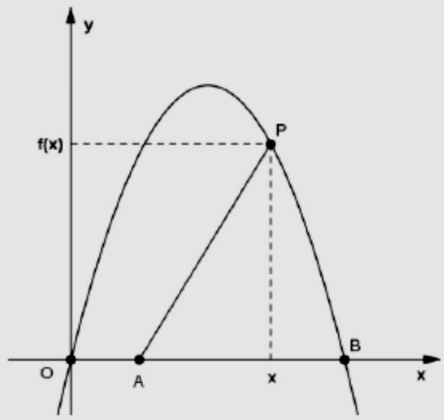
4.1. Determine as coordenadas dos vértices A, B e C.
4.2. Determine a área do retângulo $[ABCO]$.
4.3. Considere a função g tal que $g(x) = f(2x)$.
4.3.1. Determine o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Oy e designe-o por D.
4.3.2. Construa o retângulo $[ODEF]$ de forma análoga ao construído na figura e calcule a respetiva área.
4.3.3. Compare as áreas dos retângulos $[ABCO]$ e $[ODEF]$ e relacione a conclusão com a contração que transforma o gráfico de f no gráfico de g.
4.4. Considere a função h tal que $h(x) = \frac{1}{2} f(x)$.
4.4.1. Determine o ponto de interseção do gráfico de h com o eixo Oy, designe-o por G, construa o retângulo $[OGHI]$ de forma análoga ao construído na figura e determine a respetiva área.
4.4.2. Compare as áreas dos retângulos $[ABCO]$ e $[OGHI]$ e relacione a conclusão com a contração que transforma o gráfico de f no gráfico de h.
4.5. *Considere a função j definida por $j(x) = 3f\left(\frac{x}{2}\right)$. A partir do gráfico de j e, de forma análoga ao das alíneas anteriores, construa um retângulo $[OJKL]$. Indique a área do retângulo e identifique as transformações no gráfico de f que justificam o valor obtido para a área.

(Pág. 48 do Caderno de Apoio do 10.º ano)

9. Considere as funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = 3 - \sqrt{x+2}$ em $[-2, +\infty[$ e $g(x) = x^2 - 4x$ em $\mathbb{R}$.
9.1. Esboce o gráfico das funções f e g.
9.2. Determine os zeros de f.
9.3. Utilizando a calculadora gráfica, determine valores aproximados às décimas das soluções da equação $f(x) = g(x)$, justificando por que razão existem exatamente duas soluções.

(Pág. 49 do Caderno de Apoio do 10.º ano)

11. Na figura junta está representada, num plano munido de um referencial ortonormado, parte do gráfico da função f definida por $f(x) = -x^2 + 4x$ e o ponto A de coordenadas $(1,0)$.
Considere a função g que associa a cada x a distância entre A e o ponto do gráfico de f de abcissa x.



11.1. Prove que para todo x,
$$g(x) = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}.$$

11.2. Sabendo que existem exatamente dois pontos do gráfico de f que distam uma unidade de A, indique o valor exato da abcissa de um deles e utilize a calculadora gráfica para obter um valor aproximado às décimas da abcissa do outro, explicando o procedimento utilizado.

11.3. Existe um ponto em que os gráficos de f e de g se intersetam. Determine-o por métodos analíticos e interprete geometricamente o resultado obtido.

(Pág. 50 do Caderno de Apoio do 10.º ano)

Comentário:

Este domínio do 10ºano do Programa de 2014 envolve praticamente todas as operações algébricas sobre funções e o estudo das respetivas funções resultantes, a resolução de equações e de inequações (racionais e irracionais) que antes, era distribuído pelos 10º e 11ºanos. Para além de aumentarem em número, o nível de rigor e a exigência na formalidade dos conteúdos lecionados também aumenta consideravelmente.
Considerando o nível etário dos alunos a quem este Programa é dirigido, o perfil do aluno médio (quanto aos conhecimentos matemáticos, capacidade e metodologia de trabalho) à entrada do Ensino Secundário, terá de evoluir significativamente para que a maioria (dos alunos) tenha sucesso.

Finalmente, no domínio Estatística, começa-se por introduzir o sinal de somatório e algumas das suas regras operatórias, que serão úteis em diversas ocasiões ao longo do Ensino Secundário. Em particular poderão ser utilizadas neste mesmo domínio, nomeadamente aquando da manipulação de médias e desvios-padrão de amostras, ou de percentis, noções tratadas no 10.º ano. Para além das definições de variável estatística, amostra, média, variância, desvio-padrão e percentil, analisam-se as propriedades básicas destes conceitos e as respetivas interpretações em exemplos concretos.

(Programa de Matemática A, pág.10)

2.5. Estatística (EST10) – 18 aulas

- Características amostrais

A partir de 2016/17, os alunos que ingressam no 10ºano já devem ter aprendido no Ensino Básico:

7.ºano (FSS7)

Sequências e sucessões

- Sequências e sucessões como funções;
- Gráficos cartesianos de sequências numéricas;
- Problemas envolvendo sequências e sucessões.

(OTD7)

Medidas de localização

- Sequência ordenada dos dados;
- Mediana de um conjunto de dados; definição e propriedades;
- Problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização.

8.ºano (OTD8)

Diagramas de extremos e quartis

- Noção de quartil;
- Diagramas de extremos e quartis;
- Amplitude interquartil;
- Problemas envolvendo gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis.

9.ºano (OTD9)

Histogramas

- Variáveis estatísticas discretas e contínuas; classes determinadas por intervalos numéricos; agrupamento de dados em classes da mesma amplitude;
- Histogramas; propriedades;
- Problemas envolvendo a representação de dados em tabelas de frequência e histogramas.

Os primeiros quatro descritores referem-se ao significado do **símbolo de somatório e às propriedades dos somatórios**. O objetivo da sua inclusão, nesta altura no Programa, é que a prática de exercícios com somatórios lhes torne mais fácil a demonstração das principais propriedades da estatística.

$$\sum_{i=1}^{p}(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i\,,\ p \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{p}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=1}^{p} y_i\,, p \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{p} x_i\,, p \in \mathbb{N}, n < p$$

Terminologia e notação:

Sejam:

- x uma variável estatística quantitativa em determinada população**;**
- A uma amostra de dimensão $n \in \mathbb{N}$ dessa população

Admite-se que os elementos de A estão numerados de 1 a n

Representa-se por «x_i» o valor da variável x no elemento de A com o número i e designa-se por **amostra da variável estatística $\boldsymbol{x}$** (ou, simplesmente amostra) a sequência

$$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Média da amostra

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Desvios de x_i em relação à média

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

Soma dos quadrados dos desvios

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Variância de uma amostra

$$S_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$$

Desvio-padrão de uma amostra

$$S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$$

Propriedades

$$\underset{\sim}{y} = (ax_1 + h, ax_2 + h, \ldots, ax_n + h)$$
$$\Downarrow$$
$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + h$$
$$e$$
$$S_y{}^2 = a^2 S_x{}^2$$

$$SS_x = 0 \;\; sse \;\; x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$$
$$\therefore$$
$$S_x{}^2 = 0 \;\; sse \;\; x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\bar{x}^2$$

Exemplo de exercício do Caderno de Apoio, pág.53:

3. Uma certa balança tem um desvio positivo sistemático de $5g$. Pesaram-se nessa balança 4 laranjas, uma de cada vez e registou-se o seu peso em gramas. Obteve-se a amostra $\underset{\sim}{x} = (210, 182, 205, 198)$. Seja $\underset{\sim}{y}$ a amostra dos verdadeiros pesos de cada uma das 4 laranjas. Calcule SS_x e SS_y e mostre que $SS_x = SS_y$

Os alunos devem saber (descritor EST 10 – 3.12) que, dada uma população, existem critérios para escolher amostras que tenham médias e desvios-padrão, de modo a poderem ser consideradas boas estimativas da média e do desvio-padrão da população.

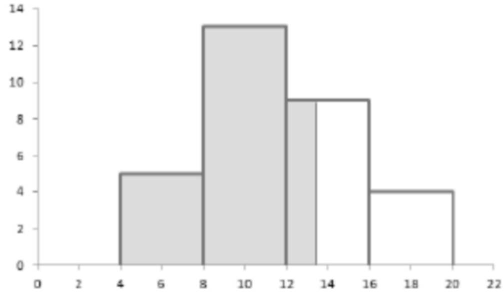
Independentemente da dimensão da amostra, o par $(\bar{x}, S_x)$ dá uma informação relevante sobre a distribuição da amostra. A estimativa da percentagem de valores da variável estatística com interesse para o estudo, num intervalo centrado na média da amostra, pode ser determinada pela **desigualdade de Chebycheff** (enunciado em EST 10 – 3.11):

Dada uma amostra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de desvio padrão não nulo, para qualquer k positivo,
a percentagem de unidade estatísticas com valores **fora do intervalo**

$$]\bar{x} - kS_x ; \bar{x} + kS_x[$$

É sempre **menor ou igual** a $\frac{1}{k^2}$

A **noção de percentil** poderá ser introduzida usando um exemplo de dados organizados na forma de **histograma**.



O percentil de ordem 65 ou, simplesmente, **percentil 65**, por exemplo, é o ponto do eixo horizontal para o qual a área acumulada dos retângulos do histograma que estão à sua esquerda, acrescida da área do retângulo que o ponto determina na classe a que pertence, é igual a 65% da área total do histograma.

O percentil de ordem k da amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ define-se como:

- O valor máximo da amostra se $k = 100$;
- A média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100}$+1 na amostra ordenada se $k \neq 100$ e $\frac{kn}{100}$ for inteiro;
- O elemento de ordem $\left[\frac{kn}{100}\right] + 1$ na amostra ordenada, nos restantes casos.

Neste Programa adotou-se a definição de percentil que faz coincidir o P_{50} com a mediana.

Segue-se um exemplo de exercício de **determinação de percentis e interpretação dos respetivos valores** (apresentado na ação sobre Metas Curriculares de Matemática A, Esc.Sec. Padre António Vieira)

1. Considere a amostra $\underset{\sim}{x} = (110, 150, 180, 200, 140, 135, 180, 120)$ dos pesos, em gramas, de 8 maçãs.
   1.1. Identifique x_4 e $x_{(4)}$.
   1.2. Qual das seguintes expressões repesenta o percentil 80.
   (i) $x_{(7)}$ (ii) $\frac{x_{(6)}+x_{(7)}}{2}$ (iii) $\frac{x_{(7)}+x_{(8)}}{2}$
   1.3. Calcule o percentil 25.
   1.4. A que percentil pertence a maçã com 140 gramas?

(A resolução de um exercício semelhante está no Caderno de Apoio, pág.56)

Comentário:

Desaparece o estudo da estatística descritiva que era feito no antigo 10ºano. Agora é feito ao longo do Programa do Ensino Básico e no Ensino Secundário explora-se a estatística de inferência.

Neste domínio é feito o estudo das regras operatórias dos somatórios com o objetivo de demonstrar as propriedades da média, variância, desvio-padrão e percentis.

Parece ser intenção, neste domínio, privilegiar a aplicação de fórmulas em detrimento do tratamento de amostras com um número grande de dados. Encontrar estratégias para ajustar esta metodologia à faixa etária dos alunos envolvidos não vai ser tarefa fácil.

O símbolo $\tilde{x}$ é usado para a mediana (definido em OTD 7-1.2) e para o conjunto dos valores da amostra no caso dos dados estarem agrupados (EST 10 – 2.4). Talvez seja preferível usar para mediana «Me» (também previsto em OTD 7-1.2).

O tratamento de amostras bivariadas, os diagramas de dispersão, a reta de mínimos quadrados e a interpretação do coeficiente de correlação só serão estudados no 11ºano. Este facto pode vir a dificultar a articulação entre os currículos da Matemática e da Física e Química nos Cursos de Ciências e Tecnologias.

Capítulo 3 – 11.º ano - Matemática A

Após o estudo das razões trigonométricas dos ângulos agudos, realizado no Ensino Básico, o início do domínio Trigonometria e Funções Trigonométricas é consagrado a estabelecer uma definição para o seno e o cosseno de um qualquer ângulo convexo, justificando-se a escolha apresentada com a motivação de estender a ângulos internos retos e obtusos, a Lei dos Senos e o Teorema de Carnot, que permitem resolver triângulos de forma simples e sistemática. É também requerido o uso adequado de uma calculadora científica para obter valores aproximados dos elementos de triângulos objeto de resolução trigonométrica. Aborda-se em seguida o estudo dos ângulos orientados e generalizados e respetivas medidas de amplitude – conceitos intimamente associados à noção de rotação – e generalizam-se as razões trigonométricas a estes ângulos, introduzindo-se o círculo trigonométrico. Após a definição do radiano como unidade de medida de amplitude, fica-se apto a definir as funções reais de variável real seno, cosseno e tangente e a estudar as respetivas propriedades.

(Programa de Matemática A, pág.15)

3.1. Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI 11) – 38 aulas

- Extensão da Trigonometria a ângulos retos, obtusos e resolução de triângulos
- Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações
- Razões trigonométricas de ângulos generalizados
- Funções trigonométricas

Antes

- Problemas envolvendo triângulos
- Círculo trigonométrico e funções seno, cosseno e tangente
- Equações trigonométricas elementares

Agora os alunos já devem saber, do 9.º ano[13]

Trigonometria (GM 9)

- Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo;

[13] A trigonometria é tratada, tal como no Programa anterior, apenas no 11.º e 12.º anos, dando continuidade ao estudo feito no 9.º ano

- Fórmula fundamental da Trigonometria;
- Relação entre a tangente de um ângulo agudo e o seno e cosseno do mesmo ângulo;
- Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares;
- Dedução dos valores das razões trigonométricas dos ângulos de $45°$, $30°$ e $60°$;
- Utilização de tabelas e de uma calculadora para a determinação de valores aproximados da amplitude de um ângulo conhecida uma razão trigonométrica desse ângulo;
- Problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas.

É proposta uma grande alteração na metodologia de ensino e são introduzidos dois Teoremas: a Lei dos Senos e o Teorema de Carnot.

Antes

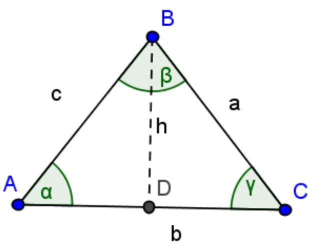
Partia-se de definição do círculo trigonométrico e da identificação do cosseno e do seno de um ângulo com, respetivamente, a abcissa e ordenada do ponto de interseção do lado extremidade do ângulo com a circunferência que limita o círculo trigonométrico. Definiam-se assim as razões trigonométricas generalizadas a um ângulo qualquer de forma compatível com as definições já conhecidas.

Agora

Opta-se por:

1. Definir as razões trigonométricas dos ângulos retos e obtusos (Descritor TRI 11-1)

1.1. Provar a «Lei dos senos» para um triângulo acutângulo qualquer



$$sen\ \alpha = \frac{h}{c} \Leftrightarrow h = c\ sen\alpha$$

$$sen\ \gamma = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a\ sen\gamma$$

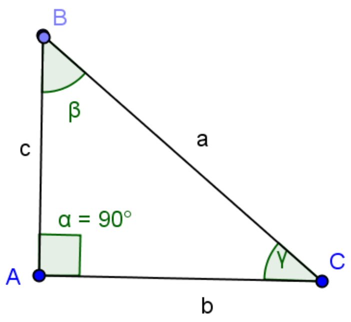
$$c\ sen\alpha = \ a\ sen\gamma$$

$$\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \gamma}{c}$$

Repetindo o raciocínio tomando a altura relativa a outro vértice, deduz-se a Lei dos senos (ou Analogia dos senos)

$$\boxed{\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \beta}{b} = \frac{sen\ \gamma}{c}}$$

1.2. Estender a Lei dos senos aos triângulos retângulos



$sen\ 90° = x = ?$

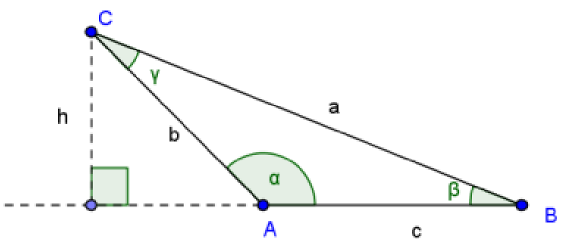
para a Lei continuar válida, $\frac{x}{a} = \frac{sen\ \beta}{b} = \frac{sen\ \gamma}{c}$

mas $sen\ \gamma = \frac{c}{a}$

então $\frac{x}{a} = \frac{c}{ac} \Leftrightarrow x = 1$

Assim, para que a Lei dos senos se verifique em triângulos retângulos, $sen\ 90° = 1$.

1.3. Estender a Lei dos senos aos triângulos obtusângulos



$sen(180° - \alpha) = \frac{h}{b}$

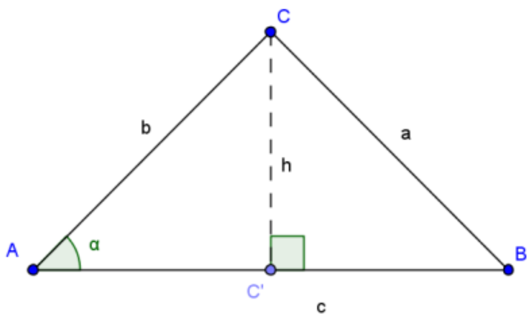
$sen\ \beta = \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a\ sen\ \beta$

para a Lei dos senos continuar válida,

$\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \beta}{b} \Leftrightarrow sen\ \alpha = a \times \frac{h}{ab} = \frac{h}{b}$

isto é, $sen(180° - \alpha) = sen\ \alpha$

1.4. Provar a «Lei dos cossenos» ou «Teorema de Carnot» para um triângulo acutângulo qualquer[14]



$\cos \alpha = \frac{\overline{AC'}}{b} \Leftrightarrow \overline{AC'} = b \cos \alpha$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se

$h^2 = b^2 - \overline{AC'}^2 = a^2 - (c - \overline{AC'})^2$

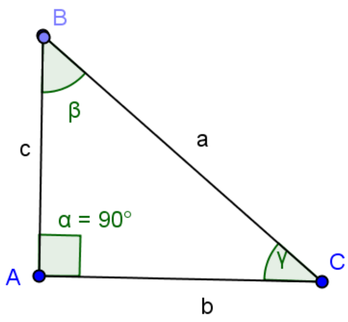
$\Leftrightarrow b^2 - (b \cos \alpha)^2 = a^2 - (c - b \cos \alpha)^2$

[14] A elaboração da demonstração é facultativa. Assim, todos os alunos devem conhecer o resultado e saber aplicá-lo, mas a demonstração não é exigível aos alunos.

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 - b^2 cos^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2 cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$

1.5. Estender o Teorema de Carnot aos triângulos retângulos



$cos\ 90° = x = ?$

para o Teorema continuar válido,

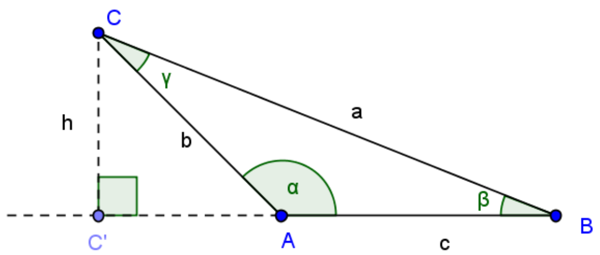
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90°$$

mas pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$

então $2bc\cos 90° \Leftrightarrow \cos 90° = 0$

Assim, para que o Teorema de Carnot se verifique em triângulos retângulos, $cos\ 90° = 0$

1.6. Estender a Teorema de Carnot aos triângulos obtusângulos



$$cos(180° - \alpha) = \frac{\overline{C'A}}{b}$$

pelo Teorema de Pitágoras,

$h^2 = b^2 - (b\cos(180° - \alpha))^2 \wedge\ h^2 = a^2 - (b\cos(180° - \alpha) + c)^2$

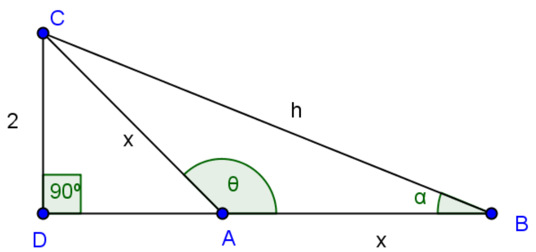
$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180° - \alpha)$

mas para o Teorema continuar válido, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

ou seja, $cos(180° - \alpha) = -cos\ \alpha$

A introdução destes novos conteúdos faz com que possam surgir exercícios com uma tipologia diferente do que era habitual. É o que se pretende retratar com o exemplo seguinte:

***Na figura está representado um triângulo isósceles obtusângulo* $[ABC]$ $(\overline{AB} = \overline{AC})$ *e o ponto* D*, projeção ortogonal de* C sobre a reta AB. Tem-se ainda que $\overline{DC} = 2$.



Sendo $B\hat{A}C = \theta$ e $C\hat{B}A = \alpha$ e sabendo que $cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, prove que $sen\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ e determine o perímetro do triângulo $[ABC]$.

(Caderno de apoio – TRI 11,9.1-ex.2, pág.13)

Proposta de resolução:

$$sen\alpha = \frac{2}{h}$$

Pela Fórmula Fundamental da Trigonometria, $sen^2\alpha = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$$sen\alpha = \frac{1}{3} \Longrightarrow h = 6$$

Pelo Teorema de Carnot, $x^2 = 6^2 + x^2 - 2 \times 6 \times x \times cos\alpha$

$$12xcos\alpha = 36 \Leftrightarrow x \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 3$$

$$x = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

Pela Lei dos senos,

$$\frac{sen\theta}{6} = \frac{sen\alpha}{\frac{9}{2\sqrt{2}}} \Leftrightarrow sen\theta = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{9} \Leftrightarrow sen\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \text{c. q. p.}$$

$$P_\Delta = 2 \times \frac{9}{2\sqrt{2}} + 6 = \frac{9}{\sqrt{2}} + 6$$

Antes de definir ângulos orientados e rotações segundo ângulos orientados, recomenda-se que se reveja o que foi dado no 2.ºciclo sobre este assunto (6.ºano, GM6 – 9.14 a 9.20 e Caderno de apoio-2.ºciclo, 9.13 a 9.19)

> …. «imagem do ponto por uma rotação de centro e ângulo » …
>
> … «rotação de sentido positivo» (ou «contrário ao dos ponteiros do relógio») e a «rotação de sentido negativo» (ou «no sentido dos ponteiros do relógio»).
>
> …existe uma única imagem de um ponto por rotação de centro O e ângulo raso, que coincide com a imagem desse ponto pela reflexão central de centro O e designá-la por imagem de por «meia volta em torno de O».

Reconhecer que a (única) imagem de um ponto por uma rotação de ângulo nulo ou giro é o próprio ponto .

Saber, … e designar, neste contexto, a rotação como uma «isometria».

Reconhecer, … uma rotação conserva as amplitudes dos ângulos.

Define-se um ângulo generalizado como um par ordenado (Descritor TRI 11-4)

Define-se «ângulo generalizado» (ou «ângulo trigonométrico») como um par ordenado (α, n), onde α é um ângulo orientado e n é um número inteiro e interpreta-se intuitivamente como o resultado de rodar o lado extremidade do ângulo α depois de $|n|$ voltas completas no sentido determinado pelo sinal de n, ou seja, um «ângulo generalizado» é um ângulo orientado α ao qual se associa um certo número de voltas efetuadas no sentido do sinal de n.

Antes

Não era dada uma definição formal de ângulo generalizado: explicava-se que era um ângulo com os mesmos lados origem e extremidade que o ângulo orientado α e indicava-se a expressão geral das amplitudes.

Fixado o centro, (α, n_1) e (α, n_2) determinam a mesma rotação de amplitude α e, para (α, n) e (β, n) determinarem a mesma rotação α e β têm de ter sentidos contrários e a soma dos valores absolutos das medidas das suas amplitudes tem de ser a medida de um ângulo giro.

A medida de amplitude do ângulo generalizado (α, n) é $a + ng$, onde a é a amplitude do ângulo α e g a medida de amplitude dos ângulos giros $(= 360°)$.

No Ensino Básico, as amplitudes dos ângulos geométricos (não giros) são consideradas no intervalo $[0,360[$, tomando o grau como unidade da medida da amplitude angular. As amplitudes dos ângulos generalizados podem ter como medida qualquer número real e variam em $]-360,360[$.

O prolongamento das razões trigonométricas aos ângulos generalizados é feito como no anterior programa, depois de se definir «círculo trigonométrico».

Na definição de «radiano» chama-se a atenção para a necessidade de, previamente, definir com "rigor" comprimento de um arco de circunferência. No Ensino Básico (GM 6 – 5.1) introduziu-se a noção de perímetro de um círculo como sendo um valor aproximado pelos perímetros de polígonos regulares nele inscritos e a ele circunscritos. Agora pretende-se dar aos alunos, intuitivamente, a noção de que a medida do comprimento de uma circunferência pode ser definida rigorosamente como sendo o supremo das medidas das linhas poligonais inscritas no arco. Talvez seja oportuno repescar este assunto mais adiante (TRI 12 – pág.105).

Passa-se depois ao estudo das funções trigonométricas e das suas propriedades.

Antes

No 11ºano podia ser feita uma breve referência aos gráficos das funções trigonométricas "desenrolando o círculo trigonométrico ao longo do eixo real". No 12.ºano era feito o estudo intuitivo em casos simples e, se possível, ligados a problemas de modelação, recorrendo à calculadora gráfica.

Para além do estudo do domínio, contradomínio, periocidade, paridade, zeros e extremos, **agora estudam-se também as funções trigonométricas inversas.**

Parece aqui ser importante realçar aos alunos[15] o cuidado a ter na resolução de exercícios do tipo:

**Determine o valor da expressão* $arcsen\left(sen\frac{5\pi}{3}\right) - arccos\left(sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

(Caderno de apoio – TRI 11,8.1-1.4, pág.12)

uma vez que é única a restrição onde se considera a respetiva função trigonométrica inversa.

[15] Um pouco à semelhança do que se passa na determinação da expressão $\sqrt{x^2}$ que é vulgarmente identificada com x sem olhar ao domínio.

Este Programa recomenda a utilização da tecnologia de forma cuidadosa e criteriosa.

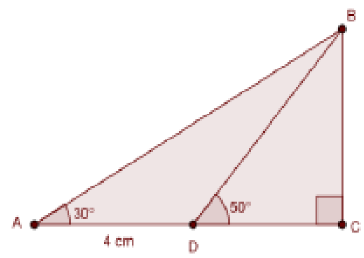
"... considera-se que no Ensino Secundário a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação (na resolução de problemas requerendo cálculos de valores aproximados de soluções de determinado tipo de equações ou de funções envolvendo, por exemplo, razões trigonométricas, logaritmos, ou exponenciais) mas que se deve evitar a sua utilização em outras provas de avaliação em que os conteúdos e capacidades envolvidas claramente o não justifiquem ou mesmo o desaconselhem."

(Programa de Matemática A, Indicações metodológicas, pág.29)

No domínio da Trigonometria pretende-se que o aluno use adequadamente uma calculadora (científica) para obter valores aproximados dos elementos de triângulos na resolução de alguns problemas. Também na resolução de alguns problemas que envolvem funções trigonométricas deve usar a calculadora gráfica.

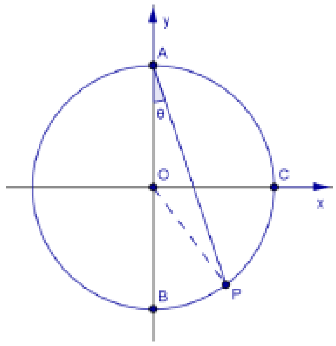
Exemplos disso, são:

2. *Na figura seguinte o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e D pertence ao lado $[AC]$. Sabe-se ainda que $\overline{AD} = 4\ cm$, $B\hat{A}C = 30°$ e $B\hat{D}C = 50°$. Determine as medidas de $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$, com aproximação às décimas.



(Caderno de apoio – TRI 11,9.2 - ex.2, pág.13)

4. Na figura está representado um referencial ortonormado Oxy e uma circunferência de centro O e de raio $r > 0$, que interseta o eixo Oy nos pontos A (de ordenada positiva) e B e o semieixo positivo Ox no ponto C. O ponto P pertence ao arco BCA e θ representa a medida da amplitude do ângulo BAP, em radianos.



4.1. *Prove que a medida da distância $d = \overline{AP}$ é dada, para cada valor de θ, por $d = 2r\cos\theta$.

4.2. Determine um valor exato e um valor arredondado às centésimas de d quando $\overline{BP} = \overline{PC}$ e $r = 2$.

4.3. Determine para que valor de θ se tem $d = r$ e, para esse valor, obtenha uma expressão, em função de r, para a área do triângulo $[AOP]$.

4.4. Sabendo que $r = 1$ e que $d = \sqrt{3}$, determine o valor de θ e o comprimento do arco menor BP.

4.5. *Seja Q o ponto de interseção da reta AP com o eixo Ox.

4.5.1 Prove que a área A do triângulo $[OQP]$ é dada por $\frac{1}{2}r^2\tan\theta\,|\cos 2\theta|$.

4.5.2 Resolva a equação $A(\theta) = 0$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

4.5.3 Considere $r = 2$ e determine, utilizando uma calculadora gráfica, os valores de θ para os quais a área do triângulo $[OQP]$ é igual a 0,5, sabendo que não há mais do que dois para $\theta < \frac{\pi}{4}$. Apresente os resultados com aproximação às décimas.

(Caderno de apoio – TRI 11,9.4 - ex.4, pág.16 e 17)

Para resolverem a última alínea, os alunos têm de recorrer a uma calculadora gráfica.

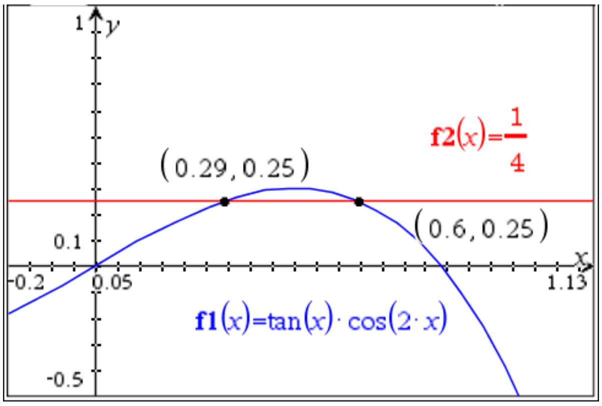
4.5.3 - Resolução

$A_\Delta = 0{,}5$

$\Leftrightarrow 0{,}5r^2 tg\theta(cos2\theta) = 0{,}5$

$\underset{r=2}{\Leftrightarrow} 4tg\theta(cos2\theta) = 1$

$\Leftrightarrow tg\theta(cos2\theta) = \dfrac{1}{4}$



$$\theta \approx 0{,}3\, rad \ \vee \ \theta \approx 0{,}6\, rad$$

Na tabela seguinte insere-se uma proposta de planificação para este domínio, considerando aulas de 45 minutos. Optou-se por deixar 4 aulas livres para aplicar instrumentos de avaliação.

Domínio 1 – Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI 11)				**38 aulas**
Domínios/ Subdomínios		Descritores das Metas Curriculares	Descritores a rever	
Extensão da Trigonometria a Ângulos retos e obtusos e resolução de triângulos	Extensão da definição das razões trigonométricas aos casos de ângulos retos e obtusos; Lei dos senos e Lei dos cossenos	1.1; 1.2 e 1.3 9.1	GM5-2.9 a 2.11 (critérios de igualdade de triângulos) GM7-4.8 a 4.10 (critérios de semelhança de triângulos) GM9 – 11.1 a 11.13 e 12.1 a 12.3	2
	Resolução de triângulos	1.4; 1.5; 1.6 e 1.7; 9.1		2
Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações	Ângulos orientados; amplitudes de ângulos orientados e respetivas medidas;	1.8 9.1; 9.2		2
	Rotações	2.1; 2.2; 3.1	GM 6 – 9.14 a 9.20	
	Ângulos generalizados; medidas de amplitudes de ângulos generalizados	4.1; 4.2; 4.3; 4.4		2
	Ângulos generalizados e	4.5; 4.6		

	rotações			
Razões trigonométricas de ângulos generalizados	Circunferência trigonométrica (círculo trigonométrico)	5.1; 5.2		4
	Generalização das definições das razões trigonométricas aos ângulos generalizados e às respetivas medidas de amplitude	5.3; 5.4; 5.5; 5.6		
	Medidas de amplitude em radianos	6.1; 6.2		
Funções trigonométricas	As funções reais de variável real seno, cosseno e tangente: domínios, contradomínios, periocidade, paridade, zeros e extremos locais	7.1; 7.2; 7.3; 7.4; 7.5; 7.6; 7.9; 7.10	FRVR 10	4
	Fórmulas trigonométricas de "redução ao 1º quadrante": seno e cosseno de $x \pm \frac{\pi}{2}$ e de $x \pm \pi, x \in \mathbb{R}$	7.8		4
	Generalização da fórmula fundamental da Trigonometria	7.7		6
	Equações do tipo $senx = k, cosx = k$ e $tgx = k$	8.2; 8.3; 8.4; 8.5; 9.3		
	Inequações trigonométricas com domínio num intervalo limitado	7.4; 7.6	ALG 9 – 1.1 e 1.2	2
	Funções trigonométricas inversas	8.2;	FRVR 10	2
	Resolução de problemas envolvendo razões trigonométricas e a determinação de distâncias	9.3		2
	Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas	9.4		2

Comentário:

Na Trigonometria, no 11º ano, aparecem como conteúdos novos as Leis dos Senos e dos Cossenos. São uns teoremas fáceis de compreender e de demonstrar, mas que ajudam bastante a simplificar a resolução de muitos exercícios e problemas. A sua introdução, neste ciclo de ensino, parece ser uma mais-valia muito significativa.

É nesta altura oportuno retomar os casos de igualdade de triângulos (GM5-2.9 a 2.11) e os casos de semelhança de triângulos (GM7-4.8 a4.10).

A introdução do estudo das funções trigonométricas inversas tem o benefício de permitir justificar melhor a resolução e o conjunto solução das equações trigonométricas e, sobretudo, vem explicar o uso das teclas sen^{-1}, cos^{-1} e tg^{-1} da calculadora. Este estudo vai contribuir (assim como a introdução do estudo das primitivas no 12ºano) para que os alunos, no final do secundário, conheçam as funções inversas de todas as funções que estudam ao longo do Programa.

O domínio *Trigonometria e Funções Trigonométricas* é retomado no 12º ano.

No domínio Geometria Analítica, introduz-se, no 11.º ano, a noção geométrica de produto escalar de vetores, deduzindo-se as suas principais propriedades, como a simetria, a bilinearidade ou a relação deste conceito com a perpendicularidade. Fixado um referencial ortonormado, o produto escalar estuda-se também do ponto de vista das coordenadas. É importante notar que as propriedades das funções trigonométricas abordadas no domínio Trigonometria e Funções Trigonométricas são fundamentais para uma correta apresentação e justificação de muitos destes resultados. Ainda neste domínio, completa-se o estudo das equações cartesianas de planos no espaço, iniciado no 10.º ano.

(Programa de Matemática A, pág.15)

3.2. Geometria Analítica (GA 11) – 32 aulas

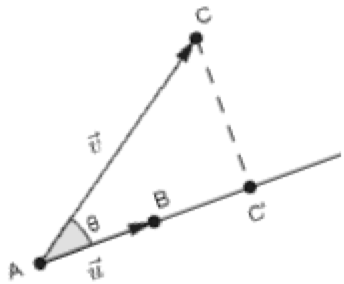
- Declive e inclinação de uma reta do plano
- Produto escalar de vetores
- Equações de planos no espaço

Novo

Neste domínio, o conceito de produto escalar é introduzido antes da definição de ângulo entre dois vetores[16].

Define-se produto escalar, ou produto interno[17], entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tomando dois representantes $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ com a mesma origem A.

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$



Considerando C' como sendo a projeção ortogonal de C sobre a reta AB:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC'}$ se os vetores $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC'}$ tiverem o mesmo sentido, ou seja, se as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$ formarem um ângulo agudo ou um ângulo nulo

ou

[16] Convém recordar o que foi dado e o que foi revisto do ensino básico no 10.º ano, em GA 10.

[17] É importante referir que esta operação não é interna (no sentido de operação fechada) apesar da designação que toma habitualmente.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\overline{AB} \times \overline{AC'}$ se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC'}$ tiverem sentidos opostos, ou seja, se as semirretas $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$ formarem um ângulo obtuso ou um ângulo raso.

É imediato, para os alunos, verificar que se os vetores dados forem perpendiculares o seu produto escalar é zero.

Só depois se define ângulo entre dois vetores como sendo o menor ângulo convexo formado por dois segmentos orientados com a mesma origem e que representem cada um dos vetores.

Antes

Começava-se por definir ângulo de dois vetores e introduzia-se a noção de produto escalar a partir da definição (do âmbito da Física) do trabalho realizado por uma força que atua sobre um corpo em repouso imprimindo-lhe um deslocamento.

$W = \left|\vec{F}\right| \times dcos\alpha$ em que α é o ângulo que a trajetória do movimento faz com o vetor que representa a força.

Depois de se estabelecer que $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ e as propriedades do produto escalar no plano e no espaço, passa-se às aplicações deste conceito: determinação do ângulo de duas retas e dedução da relação entre declives de retas perpendiculares no plano.

Uma “segunda” definição de certos conjuntos de pontos no plano (e no espaço)–a partir das propriedades da perpendicularidade de dois vetores–como a circunferência, a mediatriz de um segmento de reta e a reta tangente a uma circunferência num dado ponto (a superfície esférica, o plano mediador e o plano tangente a uma superfície esférica), embora não apareça explicitamente nos descritores do Novo Programa (o que, no Programa antigo, era bem evidente nas indicações metodológicas), deve continuar a ser uma aplicação importante.

Assim, no caderno de apoio, a propósito da resolução de problemas envolvendo a noção de produto escalar de vetores, aparecem como exemplo alguns exercícios.

4. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(-2,5)$ e $B(3,-1)$. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ do plano tais que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=0$.

(pag.21)

9. Considere, fixado um referencial ortonormado no espaço, os pontos $A(-2,5,1)$ e $B(2,3,-1)$. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x,y,z)$ do espaço tais que:
   - 9.1. $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=0$.
   - 9.2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MP}=0$, onde M é o ponto médio de $[AB]$.
   - 9.3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BP}=0$.

(pág.22)

A determinação da equação cartesiana de um plano, continua a ser introduzida como sendo mais uma outra consequência da aplicação do conceito de produto escalar.

Antes

Como equação de um plano, só se trabalhava a equação cartesiana.

Agora

Equação cartesiana

$$ax+by+cz+d=0$$

em que (x,y,z) são as coordenadas de um ponto genérico de α, (a,b,c) são as coordenadas de um vetor normal ao plano α e d é o parâmetro que se pode obter ao substituir as coordenadas de um dado ponto de α na equação.

Equação vetorial

$$P=P_0+s\vec{u}+t\vec{v}$$

em que P é um ponto genérico de α, P_0 é um ponto dado de α, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores não colineares paralelos ao plano α e t é um parâmetro real.

Como consequência direta da equação vetorial do plano, é também referido o «sistema das equações paramétricas do plano α».

Exemplo de trabalho individual (da Ação de Formação sobre Programa e Metas Curriculares de Matemática A promovida pela Direção Geral de Educação (DGE):

Atividades práticas

GA11

2. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere a reta s de equação vetorial $s: (x, y, z) = (0,5,0) + t(-2,2,1),\ t \in \mathbb{R}$.
   - 2.1. Averigue se os pontos $A(-3,1,4)$ e $B(2,3,-1)$ pertencem à reta s.
   - 2.2. Determine o ponto de interseção da reta s com o plano xOz.
   - 2.3. Indique uma equação vetorial da reta r, paralela a s e que passa pela origem do referencial.
   - 2.4. Indique uma equação vetorial da reta t perpendicular a s e que passa pelo ponto B.
   - 2.5. Justifique que a reta s interseta o eixo Oy e determine uma equação vetorial do plano definido pela reta s e o eixo Oy.
   - 2.6. Indique, justificando, qual a posição relativa da reta s e do plano π definido pela equação $4x - 4y - 2z - 5 = 0$.

Resolução da Atividade prática com a indicação dos descritores aplicados

2. $s: (x, y, z) = (0,5,0) + t(-2,2,1), t \in \mathbb{R}$

2.1. $A(-3,1,4) \in s?$

$(-3,1,4) = (-2t, 5 + 2t, t), t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -3 = -2t \\ 1 = 5 + 2t \\ 4 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ -4 = 2t \\ t = 4 \end{cases}$$

Como o sistema é impossível, $A \notin s$

$B(2,3,-1) \in s?$

$$\begin{cases} 2 = -2t \\ 3 = 5 + 2t \\ -1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ -2 = 2t \\ t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$$

Como o sistema é possível e determinado, $B \in s$.

Descritores: GA10-5.6-6.3-10.3

2.2. $xOz: y = 0$ Como $P \in xOz, y_P = 0$

$$P(x, 0, z) \in s \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ 0 = 5 + 2t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ t = -\frac{5}{2} \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$\therefore P = \left(5,0,-\frac{5}{2}\right)$ é o ponto de interseção da reta s com o plano xOz.

Descritores: GA10-8.1-5.6-6.3-10.3

2.3. $r \parallel s \Rightarrow \vec{r} = \vec{s} = (-2,2,1)$

$(0,0,0,) \in r$

$\therefore r: (x, y, z) = (0,0,0) + k(-2,2,1), k \in \mathbb{R}$ é a equação vetorial da reta r, paralela a s e que passa pela origem do referencial.

Descritores:GA10-5.2-5.5-10.3

2.4. $t \perp s\ \wedge B \in t$

$t \perp s \Rightarrow \vec{t}.\vec{s} = 0$ Então pode ser $\vec{t} = (0,-1,2)$

$t: (x, y, z) = (2,3,-1) + u(0,-1,2), u \in \mathbb{R}$

Descritores: GA11-2.4-2.5-4.1-4.2

2.5. $Oy: x = 0 \wedge z = 0$

$s: (x, y, z) = (-2t, 5 + 2t, t), t \in \mathbb{R}$

Se s interseta Oy, vem

$-2t = 0 \wedge t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

ou seja, $\boldsymbol{s}$ **interseta o eixo $\boldsymbol{Oy}$ no ponto $(\mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{0})$**

Seja $M = (0,5,0)$

O eixo Oy tem por vetor diretor $\vec{y} = (0,1,0)$ e $\vec{s} = (-2,2,1)$. São vetores do plano (paralelos) não colineares, porque são vetores diretores de retas do plano. GA11-3.7

Assim, **uma equação vetorial do plano definido pela reta $\boldsymbol{s}$ e o eixo $\boldsymbol{Oy}$** vai ser

$$(x, y, z) = (0,5,0) + k_1(-2,2,1) + k_2(0,1,0), k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Descritores: GA10-8.2

GA11-3.8-4.3-4.4

2.6. $\pi: 4x - 4y - 2z - 5 = 0 \Longrightarrow$

$\overrightarrow{n_\pi} = (4, -4, -2)$

$\vec{s} = (-2,2,1)$

Ora $\overrightarrow{n_\pi} = -2 \times \vec{s} \Longrightarrow \overrightarrow{n_\pi} \parallel \vec{s} \Longrightarrow s \perp \pi$

A reta $\boldsymbol{s}$ é perpendicular ao plano $\boldsymbol{\pi}$.

Descritores:GA11-3.6-4.3-4.4

A interpretação geométrica (acompanhada da visualização no espaço) da interseção de planos e de retas e planos assim como a identificação das condições de paralelismo e perpendicularidade de planos e de retas e planos é feita no Ensino Básico (GM 9).

Nota:

A resolução de sistemas de 3 equações com 3 incógnitas, assim como as respetivas interpretações geométricas (posição relativa dos planos) saíram do programa. Também saiu a programação linear.

Comentário:

Neste domínio devia continuar a contemplar-se:

- a interpretação vetorial das condições de paralelismo e perpendicularidade (acompanhada da visualização no espaço) de retas/planos e planos, por facilitar bastante a resolução dos problemas que envolvem estas situações;
- a interseção de planos, nomeadamente:
    - a dedução das equações cartesianas de uma reta no espaço a partir da resolução do sistema que traduz a interseção de dois planos;
    - a interseção de planos ligada à resolução de sistemas de três equações pelo método da adição ordenada (ou pelo método misto)

      – O método da adição ordenada desenvolve o raciocínio e agiliza o cálculo. No Ensino Secundário é, neste domínio, a melhor altura para se treinar este tipo de resolução de sistemas.

    - a (revisão da) classificação de sistemas de equações agora ligada à interpretação geométrica da posição relativa de planos.

O desenvolvimento da Geometria Analítica no Ensino Secundário termina neste domínio.

No domínio Sucessões, após a apresentação de alguns aspetos gerais, é introduzido o princípio de indução matemática, que constitui um instrumento fundamental para o estudo de diversas propriedades das sucessões, servindo ainda de suporte teórico à definição de sucessões por recorrência. São estudadas as progressões aritméticas e geométricas bem como o cálculo da soma de sequências dos respetivos termos.
A noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves. É pois exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição. É também desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites, incluindo uma análise das situações ditas indeterminadas, devendo os alunos justificar igualmente alguns destes resultados.

(Programa e Metas Curriculares de Matemática A, pág.15)

3.3. Sucessões (SUC 11) – 44 aulas

- Conjunto dos majorantes e conjunto dos minorantes de uma parte não vazia de $\mathbb{R}$
- Generalidades acerca de sucessões
- Princípio de indução matemática
- Progressões aritméticas e geométricas
- Limites de sucessões

No domínio das sucessões, a primeira alteração aparece relacionada com o Princípio de indução matemática.

Agora
A utilização do princípio de indução matemática aparece explicitamente no Programa.

Antes
Aparecia como exemplo de um dos métodos de demonstração de teoremas inserido num dos temas transversais do Programa – Lógica e Raciocínio. A referência (abaixo indicada) colocada nas indicações metodológicas conduziu a que, na prática, tivesse sido considerado um assunto com

carácter facultativo, nem sempre lecionado e quase nunca considerado em instrumentos de avaliação.

Departamento do Ensino Secundário **Matemática A** 21

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
▪ Noção de teorema: hipótese, tese e demonstração. Métodos de demonstração.	No que diz respeito aos métodos de demonstração, eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os estudantes terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). Não estão sugeridos explicitamente no corpo do programa, mas todo o estudo da Geometria Analítica se baseia numa geometria sintética euclidiana, semi-intuitiva, semi-dedutiva em que se procuram explorar intuições espaciais e habilidades dedutivas. O hábito de pensar correctamente, que é o que afinal está em causa, deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente ou por escrito e, sempre que possível, os estudantes devem realizar exercícios metodológicos de descoberta de justificações (que não são mais do que novos problemas, por vezes dentro de outros problemas cuja resolução carece de ser comprovada). A indução matemática deve aparecer individualizada como exemplo particular do raciocínio dedutivo (quer para provar propriedades de sucessões, quer para provar propriedades combinatórias, se houver tempo). A abordagem de algumas demonstrações directas e indirectas (e nestas, a demonstração por redução ao absurdo) é inevitável. Assumem também uma grande importância demonstrações utilizando contra-exemplos.

Com a **indução matemática** podem provar-se as “fórmulas” das progressões, termo geral e soma de n termos consecutivos, mas também alguns resultados curiosos e úteis como por exemplo:

- sendo a e n números naturais, $a^n - 1$ é múltiplo de $a - 1$;
- número de diagonais[18] de um polígono com n lados, $\frac{n(n-3)}{2}$;
- número de apertos de mão[19] que são dados quando n pessoas se encontram e se cumprimentam todas entre si, $\frac{n(n-1)}{2}$;

…

[18] Exemplos a retomar no 12º ano, no Cálculo Combinatório
[19]

Exemplo de **atividade prática** (da Ação de Formação sobre Programa e Metas Curriculares de Matemática A promovida pela Direção Geral de Educação (DGE):

SUC11

1. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$(u_n) = \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{4+u_n}{3} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

1.1. Mostre, por indução, que $u_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.2. Tendo em conta o resultado da alínea anterior, mostre que(u_n) é uma sucessão decrescente.

1.3. Justifique que u_n é convergente é calcule o respetivo limite.

Resolução da Atividade prática com a indicação dos descritores aplicados

1.1. Seja $P(n): u_n > 2$

$P(1): u_1 = 3 > 2$ proposição verdadeira

Hereditariedade: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$u_n > 2 \Rightarrow u_{n+1} > 2$$

Demonstração:

$$u_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4+u_n}{3} > \frac{4+2}{3} = 2$$

$$\therefore u_{n+1} > 2$$

Como $P(1)$ é verdadeira e se verifica a hereditariedade de $P(n)$, podemos concluir que $u_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}$

Descritores: SUC 11 -3.1-3.2-3.3

1.2.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4+u_n}{3} - u_n = \frac{4}{3} + \frac{u_n}{3} - u_n = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}u_n < \frac{4}{3} - \frac{4}{3}$$

$$u_n > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}u_n > \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}u_n < -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} - \frac{2}{3}u_n < \frac{4}{3} - \frac{4}{3}$$

Como $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

Podemos concluir que (u_n) é uma sucessão decrescente.

Descritores: SUC 11 -2.2

1.3. (u_n) é monótona decrescente e é limitada porque $2 < u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$

(logo é convergente para o ínfimo dos seus termos (2))

Como é decrescente e minorada, é convergente.

Descritores: SUC 11 -1.2-2.5-2.6-6.4

$$\lim u_{n+1} = \frac{4 + \lim u_n}{3} \Leftrightarrow 3 \lim u_{n+1} - \lim u_n = 4 \Leftrightarrow 3a - a = 4 \Leftrightarrow 2a = 4$$

$\Leftrightarrow a = 2$

Descritores: SUC 11 -6.7-7.1-7.4

É conveniente realçar aos alunos que:

a) há propriedades que são verdadeiras para o 1 e que não são hereditárias.

Ex.1) $n^2 - n + 41$ é um número primo para valores de n compreendidos entre 1 e 40, mas é falsa para $n = 41$, pois $41^2 = 41 \times 41$

Ex.2) $n^2 + n + 41$ é um número primo para valores de n compreendidos entre 1 e 39, mas é falsa para $n = 40$, pois $40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 80 + 1 = (40 + 1)^2 = 41 \times 41$.

Ex.3) Pierre de Fermat (1601-1655) conjeturou que $F(n) = 2^{2^n} + 1, n = 0, 1, 2, \ldots$ eram números primos, mas Euler (1707-1783) mostrou que $F(5) = 641 \times 6700417$

b) há propriedades que são hereditárias e não são válidas para o inteiro 1.

Ex.4) $10^n = \dot{4}$ [20] é hereditária, mas não é válida para $n = 1$.

A História da Matemática está cheia de exemplos de matemáticos que criticam os resultados dos seus antecessores ou dos seus colegas por discordarem do rigor das demonstrações apresentadas ou por detetarem falhas em alguns casos particulares.

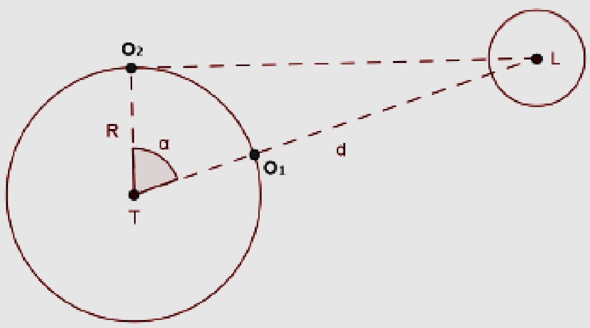
Este parece ser um dos domínios, apesar de não estar explicitado nos descritores, particularmente adequado para fazer uma abordagem do ponto de vista histórico da evolução da Matemática e da História dos números.

[20] $\dot{4}$ é uma notação usada para múltiplo de 4

No estudo das **progressões aritméticas e geométricas**, que não é inovador relativamente ao Programa antigo, vêm a propósito as **histórias** da Matemática,

- relacionadas com Gauss (1777-1855) sobre a soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética (SUC 11- 5.2);
- os paradoxos mais conhecidos de Zenão de Eleia (490? - 430 a.C.?): a "*Dicotomia*" e "*Aquiles e a tartaruga*".
- a história do xadrez, a do alfaiate que negoceia o nº de botões do fato, a do construtor que negoceia o nº de degraus da moradia ou as "perguntas de algibeira" do tipo «a que horas estava meio cheio um poço seco onde se plantou aquela *florinha* especial que se reproduzia de minuto a minuto e que ficou cheio às …?», …
- a determinação do número necessário de dobragens, de uma folha com uma determinada espessura, para preencher a distância da Terra à Lua. Permite relembrar a Trigonometria.

3. **Suponha que, num local O_1 da Terra situado no equador à longitude de $11° 56' 4' E$, um observador avista um eclipse da Lua, estando esta no zénite (ou seja, na vertical do próprio ponto O_1). O mesmo eclipse é observado também no equador mas a partir de um ponto O_2 à longitude de $100° 59' 8'' E$, sendo a Lua avistada no horizonte.



Sabendo que o raio da Terra mede cerca de $6366\ km$ determine aproximadamente a distância da Terra à Lua (distância entre os respetivos centros), interpretando adequadamente a figura junta, em que as distâncias e os ângulos não são representados realisticamente à escala, para maior clareza do desenho (utilize uma calculadora científica para efetuar os cálculos aproximados que forem necessários).

(caderno de apoio do 11º ano, pág.14)

ou, no mesmo contexto, ou para relembrar na altura em que se introduzem os logaritmos no 12ºano

Admita que tem uma folha de papel com meio milímetro de espessura e imagine que é possível dobrá-la ao meio tantas vezes quantas se queira.

Quantas dobragens serão necessárias para que a espessura da folha ultrapasse a distância da Terra à Estrela Polar?

Para resolver este problema, deve ter em conta que a distância da Terra à Estrela Polar é de 680 anos-luz (um ano-luz é a distância que a luz percorre num ano, à velocidade de 300 mil quilómetros por segundo).

Sugere-se que percorra as seguintes etapas:

- *Determinar a distância da Terra à Estrela Polar, em milímetros, apresentando o resultado na forma* $a \times 10^b$, *com* b *inteiro e* a *entre* 1 *e* 10, *arredondado às milésimas (considere* $1 \text{ ano} = 365,25 \text{ dias}$*).*
- *Determinar a expressão que dá a espessura, em milímetros, da folha de papel, ao fim de* n *dobragens.*
- *Traduzir o problema proposto por uma inequação.*
- *Resolver a inequação e responder à questão colocada.*

(Exemplo F da Informação-Exame de Mat.B-2007
http://www.docmath.net/fggfiles/mat/Informacao_exames_2007/12/ie_mat_b_735_2007.pdf)

Ainda a propósito das progressões geométricas é oportuno dar uma (nova) explicação para o facto de uma dízima infinita periódica ser um número racional.

$$u_1 = 0,3$$
$$u_2 = 0,03$$
$$u_3 = 0,003$$
$$\dots$$
$$S = \frac{0,3}{1-0,9} = \frac{1}{3}$$

Também a construção de fractais – que, de forma simples e abreviada, são formas geométricas que se obtêm a partir de uma figura base à qual se aplicam transformações que se vão repetindo indefinidamente e que têm duas características fundamentais: a auto semelhança (uma parte do fractal é semelhante ao fractal completo) e a complexidade infinita (o processo recursivo da sua construção pode ser sempre continuado) –pode ser uma atividade motivadora e proporcionar uma melhor compreensão dos conceitos.

E, para despertar o espírito matemático nos alunos mais interessados, pode indicar-se um tópico para investigar. Por exemplo, como se pode chegar ao termo geral de uma sucessão desconhecida (analisar as primeiras diferenças de uma sequência, as segundas diferenças, …)

- **Limites de sucessões**

Agora

O estudo das sucessões é feito antes do estudo das funções para conduzir à abordagem rigorosa do conceito de limite de funções segundo Heine. Assim, pretende-se que a definição de limite de uma sucessão,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall\delta > 0, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$$

seja muito trabalhada e se façam diversas demonstrações.

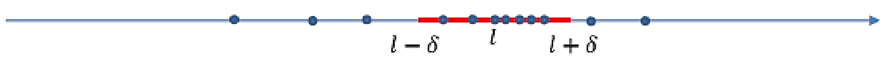
Os alunos devem apropriar-se bem da ideia que, quando uma sucessão tende para l, a partir de uma certa ordem, todos os termos da sucessão estão tão próximos de l quanto se queira.

(descritor SUC11-6.1:)

Diz-se que $\lim u_n = l$ se para todo o real $\delta > 0$ existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Longrightarrow |u_n - l| < \delta.$$

Isto é, $u_n \in]l - \delta, l + \delta[$ a partir da ordem p.



Antes

O conceito de limite de uma função era abordado de forma intuitiva, a propósito do estudo das assíntotas das funções racionais. Parece que isto levou a que os alunos criassem algumas ideias erradas como, por exemplo, a ideia que o limite de uma sucessão nunca era atingido.

Pretende-se agora que os alunos provem, por definição, que uma sucessão tem um dado limite, como a seguir se exemplifica.

SUC11-1.9: Provar que $\lim u_n = \lim \frac{2n+1}{n+3} = 2$.
Seja $\delta > 0$. Basta exibir uma ordem p a partir da qual $|u_n - 2| < \delta$.

$$|u_n - 2| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{n+3} < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{\delta} - 3 < n.$$

Basta pois tomar qualquer natural p superior a $\frac{5}{\delta} - 3$.

SUC11-1.9: Provar que $\lim u_n = \lim 3n + 1 = +\infty$.
Seja $L > 0$. Basta exibir uma ordem p a partir da qual $u_n > L$.

$$u_n > L \Leftrightarrow 3\text{n} + 1 > L \Leftrightarrow n > \frac{L-1}{3}.$$

Basta pois tomar qualquer natural p superior a $\frac{L-1}{3}$.

(in documentação da Ação promovida pela DGE sobre limites 11.º ano)

O estudo da «álgebra dos limites», incluindo as situações ditas «indeterminadas» encontra-se expresso numa longa lista de descritores do domínio SUC11 (descritores 6.11 a 6.26, pág. 33 e 34). Nessa lista abunda o símbolo «#», indicando-se assim que não é necessário efetuar um estudo sistemático de todas essas propriedades. Ainda que os alunos devam conhecer todos estes resultados, e saber aplicá-los, o professor poderá escolher apenas algumas das propriedades para tratar de forma mais detalhada na sala de aula.

O *Teorema das Sucessões Enquadradas* deixa de ser um conteúdo a lecionar no 11.º ano. Agora faz parte do domínio das funções do 12.º ano (FRVR 12).
Continua a ser lecionada no 11.º ano (descritor 6.8 de SUC 11) a proposição: *"o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão que tende para zero, é uma sucessão que tende para zero"*, cuja a demonstração deve ser feita também a partir da definição de limite de uma sucessão (como é sugerido no caderno de apoio, pág.25).

Demonstração:

Suponhamos que (u_n) é limitada. Então $\exists M \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

Suponhamos também que (v_n) é tal que $v_n \to 0$. Então $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow |v_n| < \delta$

Assim, tem-se $|u_{n\times} v_n| = |u_n| \times |v_n| \leq M \times |v_n|, \forall n \in \mathbb{N}$

e também, dado $\varepsilon > 0$ tal que $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$,$\exists p_1 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p_1 \Rightarrow |u_{n\times} v_n| < M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

e portanto $lim(u_{n\times} v_n) = 0$

Um limite bastante importante, cuja demonstração se encontra prevista, ainda que a título facultativo, no descritor SUC 11- 6.30, é:

30. +Provar, dado um número real $a > 0$, que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, começando por observar, no caso de $a \geq 1$, que $1 \leq a \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

Esta prova deverá ser efetuada sem utilizar o «binómio de Newton» nem o «Teorema das Sucessões enquadradas», resultados que se encontram previstos para o 12.º ano de escolaridade.

Sugere-se[21] a utilização da propriedade distributiva da multiplicação que permite escrever:

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = 1^n + n\frac{a}{n} + \text{"}termos\ não\ negativos\text{"} \geq a$$

Desta forma, se $a \geq 1$, obtém-se a desigualdade anunciada, ou ainda

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a}{n}$$

Fixado $\varepsilon > 0$, obtém-se para $N > \frac{a}{\varepsilon}$ que $\sqrt[n]{a} \in]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$.

O caso $0 < a < 1$ decorre da igualdade $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$

[21] Esta sugestão foi dada na Ação de Formação promovida pela DGE e também aparece no Caderno de Apoio, pág. 27, 28.

Comentário:

A introdução explícita do princípio de indução matemática no domínio das sucessões no 11.º ano parece ser o mais natural e ajustado no desenvolvimento do ensino das sucessões.

A utilização do princípio de indução matemática para efetuar demonstrações deve ser retomada no âmbito do 12.º ano a propósito de algumas propriedades referidas no domínio do Cálculo Combinatório.

A indução matemática é um pré-requisito importante para o prosseguimento de estudos em muitos cursos do Ensino Superior.

O estudo e cálculo de limites com o rigor que se deve exigir talvez seja “mais bem recebido” pelos alunos se for precedido ou intercalado com as atividades/assuntos “mais leves” que já foram referidos.
Outras sugestões:

Sucessão de Fibonacci

Sucessões de números poligonais associadas ás representações dos modelos geométricos:

Números triangulares: 1,3, 6, 10, 15, … definida por $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + n, \; n \geq 2 \end{cases}$

Números quadrados: 1, 4, 9, 16, 25, … definida por $\begin{cases} q_1 = 1 \\ q_n = q_{n-1} + 2n - 1, \; n \geq 2 \end{cases}$

ou

$$q_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Números pentagonais: 1, 5, 12, 22, 35, … definida por $\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_n = p_{n-1} + 3n - 2, \; n \geq 2 \end{cases}$ ou

$$p_n = \frac{n(3n-1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Números hexagonais: 1, 6, 15, 28, 45, … definida por $\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_n = h_{n-1} + 4n - 3, \; n \geq 2 \end{cases}$ ou

$$h_n = n(2n-1), \forall n \in \mathbb{N}$$

No domínio Funções Reais de Variável Real, do 11.º ano, utilizam-se os conceitos introduzidos no domínio Sucessões, para, pelo processo atribuído a Heine, ficar definida a noção de limite de uma função, num dado ponto ou em mais ou menos infinito. (...)

Apresenta-se em seguida a noção de continuidade e, como uma aplicação da noção de limite de uma função, o estudo das assíntotas, em particular no caso do gráfico de uma função racional.

A noção de derivada é igualmente introduzida neste domínio, fazendo-se uma interpretação geométrica da derivada de uma função num dado ponto e estabelecendo-se fórmulas para a soma, diferença, produto, quociente e composta de funções diferenciáveis e calculando-se, diretamente a partir da definição, a derivada de algumas funções elementares. A ligação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma dada função é aqui estabelecida invocando-se o Teorema de Lagrange para uma das implicações, embora apenas se exija uma interpretação geométrica desse resultado. Em contrapartida, pretende-se que o aluno saiba justificar a propriedade segundo a qual se uma função atinge um extremo num dado ponto em que é diferenciável, então a derivada anula-se nesse mesmo ponto, desde que pertença a um intervalo aberto contido no domínio da função. É também proposta especificamente a aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto.

(Programa de Matemática A, pág.15 e16)

3.4. Funções Reais de Variável Real (FRVR 11) – 56 aulas

- Limites segundo Heine de funções reais de variável real
- Continuidade de funções
- Assíntotas ao gráfico de uma função
- Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

Este Programa de 2014 continua a optar pela definição de Heine, tal como o Programa de 2001 (o estudo da definição de Cauchy[22] continua a não ser abordado no ensino secundário).

[22] Segundo Cauchy, diz-se que uma função real de variável real f tem limite l num ponto a aderente ao respetivo domínio D_f se $\forall\delta > 0\ \exists\varepsilon > 0: \forall x \in D_f, |x-a| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \delta$

Antes

No 11.º ano, o conceito de limite era abordado de forma intuitiva a propósito do estudo das assíntotas das funções racionais.

■ Conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e de $-\infty$.	O conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral esquerdo e direito). Neste contexto devem ser introduzidos os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, devendo chamar-se a atenção para o facto de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso. Este conceito deve ser abordado de uma forma experimental.

(Programa do 11.º ano de Matemática A de 2001)

Só no 12.º ano é que era dada a definição de limite.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
Teoria de limites ■ Limite de função segundo Heine. Propriedades operatórias sobre limites (informação); limites notáveis (informação). Indeterminações. Assímptotas. Continuidade. ■ Teorema de Bolzano–Cauchy (informação) e aplicações numéricas.	As indeterminações são referidas apenas para mostrar as limitações dos teoremas operatórios. o programa apenas pressupõe que se levantem as indeterminações em casos simples. Dificuldade a não exceder: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-2x+1}{x^2+3}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\ ;\ \lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$$ É aconselhável que os estudantes experimentem numérica e graficamente a relação entre os limites no infinito da exponencial, da potência e dos logaritmos.

(Programa do 12.º ano de Matemática A de 2001)

No Programa de 2001 era dada a definição de limite de uma função num ponto (segundo Heine) do seguinte modo:

> Dada uma função f real de variável real e $\boldsymbol{a}$ **um ponto de acumulação do domínio de $\boldsymbol{f}$**, diz-se que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ se e só se a toda a sucessão (x_n) de valores do domínio de f convergente para a por valores diferentes de a, corresponde uma sucessão de imagens $\big(f(x_n)\big)$ convergente para b.

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \forall (x_n)\in D_f\setminus\{a\},\, x_n\to a \Longrightarrow f(x_n)\to b$$

O limite de $f(x)$ não dependia do valor de $f(a)$.

Agora

Opta-se pela versão que consiste em considerar **sucessões que podem tomar o valor de $\boldsymbol{a}$**. A definição de limite de uma função num ponto (segundo Heine) é:

> Dada uma função f real de variável real e **$\boldsymbol{a}$ um ponto aderente ao domínio de $\boldsymbol{f}$**, diz-se que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se a toda a sucessão (x_n) de valores do domínio de f convergente para a, corresponde uma sucessão de imagens $\big(f(x_n)\big)$ convergente para b.
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n) \in D_f, x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to b$$

FVRV11 – *1. Definir limite de uma função num ponto e estudar as respetivas propriedades fundamentais*

1. Identificar, dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, a como «ponto aderente a A» quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.
2. Identificar, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ como «limite de $f(x)$ quando x tende para a» **quando $\boldsymbol{a}$ for aderente ao domínio $\boldsymbol{D_f}$ de $\boldsymbol{f}$** e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a, $\lim f(x_n) = b$, justificar que um tal limite, se existir, é único, representá-lo por «$\lim_{x \to a} f(x)$», referir, nesta situação, que «$f(x)$ tende para b quando x tende para a» e estender esta definição e propriedade ao caso de limites infinitos

...

5. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f, que se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.
6. Saber, dada uma função real de variável real f e um ponto $a \in D_f$, que se os limites $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ e que, nesse caso, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Para ilustrar, consideremos os exercícios seguintes:

1. Determine, caso exista, $\lim_{x \to 0} f(x)$, sendo a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

No Programa de 2001, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Agora o limite não existe.

2. Determine, caso exista, $\lim_{x \to 0} h(x)$, sendo a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ -x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Neste caso, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ tal como se considerava no Programa Antigo.

Segundo os autores, as principais razões indicadas para esta mudança são:

- a noção de ponto aderente é mais fácil para os alunos entenderem que a noção de ponto de acumulação;
- os limites laterais passam a poder ser encarados como limites da restrição da função inicial a determinado conjunto;
- é esta a definição mais utilizada no Ensino Superior na introdução da Análise Matemática;
- a definição de continuidade de uma função num ponto também fica simplificada (basta que tenha limite nesse ponto).

FRVR 11-2.2

2. Designar, dada uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, a função f por «contínua em a» quando o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

É claro que toda a função f é contínua em todo o ponto isolado do seu domínio.

A definição dada no Programa de 2001 obrigava a ter cuidados suplementares para que se evitassem erros no enunciado de determinadas propriedades. Segue-se um exemplo apresentado na ação de formação sobre Metas Curriculares de Matemática A, a partir de uma obra de referência: *Compêndio de Matemática* de J. Sebastião e Silva.

Outro tipo de incorreções que se podem encontrar, agora claramente resultantes da definição de limite classicamente adoptada no secundário, está associado à definição habitualmente dada de **continuidade**:

204 COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA — 6.º ANO

DEFINIÇÃO 1'. Diz-se que uma função $f(x)$ é **contínua num ponto** a, quando se verificam as duas seguintes condições:

1) o ponto a pertence ao domínio da função $f(x)$.
2) $f(x)$ tende para $f(a)$ quando x tende para a, isto é:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Com esta definição, uma função não seria contínua num ponto isolado do domínio...

Exemplo

A função $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$ não seria contínua em 2, único ponto do respectivo domínio, o que é um contra-exemplo para:

A soma, a diferença e o produto de duas funções contínuas num dado ponto ainda são funções contínuas nesse ponto.

A definição apresentada no Programa de 2014, no entanto, também apresenta algumas dificuldades "inevitáveis", tal como foi referenciado na ação de formação (acima referida).

Mesmo com a definição dada de limite há que ter alguns cuidados com os **domínios das funções** quando se pretende enunciar resultados relativos a limites de funções resultando de aplicação de operações algébricas ou composição a funções dadas.

Esses cuidados já foram referidos e exemplificados a propósito dos resultados gerais acerca do **limite da soma, produto e quociente**. O mesmo ocorre com o limite de uma função composta

11. Justificar, dadas funções reais de variável real f e g **e um ponto a aderente a D_{gof}**, que se $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to b} g(x) = c \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \to a} (gof)(x) = c$.

O problema, mais uma vez, é que não fica garantido à partida que o ponto a em que se pretende calcular o limite continue a ser **aderente** ao domínio da nova função construída a partir das funções dadas. Considere-se, por exemplo, $f(x) = -x^2$, $g(x) = x \ln x$ e $a = b = c = 0$; temos $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ (em particular 0 é aderente aos domínios de f e g), mas o domínio de gof é **vazio**, não tendo portanto pontos aderentes.

(Ação de Formação sobre Metas Curriculares de Matemática A)

Neste programa está contemplado o cálculo de limites que implicam o levantamento de indeterminações e a "mudança de variável" que, no anterior Programa, só apareciam no 12.º ano.

É importante realçar aos alunos que, na definição de derivada, o limite é, por natureza, sempre "por valores diferentes". O ponto em que se calcula o limite não pertence nunca ao domínio da função, já que se trata do limite de uma razão incremental que, por definição, é uma função cujo domínio não pode conter o ponto em que se pretende calcular o referido limite.

Nas aplicações das derivadas ao estudo de funções reais de variável real, os alunos devem, agora, ficar a conhecer o **Teorema de Lagrange** (este Teorema não aparecia no Programa de 2001). A demonstração não é requerida, mas devem sabê-lo interpretar geometricamente.

FRVR 11-8.2

2. Saber, dada uma função real de variável real f contínua em $[a,b]$, $(a<b)$, e diferenciável em $]a,b[$ que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, interpretar geometricamente este resultado e designá-lo por «Teorema de Lagrange».

O exemplo seguinte (do Caderno de Apoio, pág. 37) ilustra o que se pretende:

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=x^3-x$.
   1.1. Determine o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos A e B de abcissa, respetivamente, -2 e 1.
   1.2. Verifique a existência de pelo menos um ponto C do gráfico de f , com abcissa compreendida entre -2 e 1, em que a reta tangente tem declive igual ao da reta AB , determinando a abcissa de C.

Comentário:

Este é o domínio do Programa no qual surge uma mudança para a qual é preciso "ter olho clínico". Esta alteração na definição de limite de uma função num ponto provoca uma alteração na resolução de exercícios, neste e no anterior Programa, com o mesmo enunciado. É conveniente alertar os alunos para esta alteração e avisá-los dos cuidados a ter ao consultarem resoluções de Testes ou Exames antigos.

Alguns dos exercícios propostos no cálculo de limites também aparentam uma complexidade maior, se compararmos com os que habitualmente apareciam.

No domínio Estatística, estudam-se as retas de mínimos quadrados associadas a uma sequência de pontos do plano. As coordenadas destes pontos podem em particular representar os valores de uma amostra bivariada, o que permite a aplicação deste conceito ao estudo da correlação de duas variáveis estatísticas definidas numa mesma população.

(Programa de Matemática A, pág.16)

3.5. Estatística (EST 11) – 8 aulas

– Reta de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficiente de correlação

Antes, no final do **10.º ano** em Estatística, estava previsto:

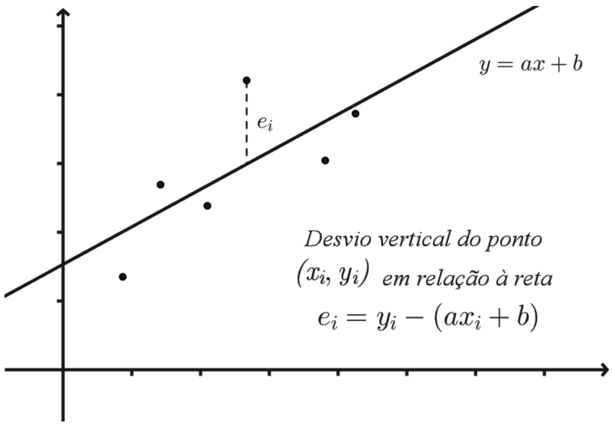
Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva) ▪ Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação; exemplos gráficos de correlação positiva, negativa ou nula. ▪ Coeficiente de correlação e sua variação em $[-1, 1]$. ▪ Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física. ▪ Ideia intuitiva de recta de regressão; sua interpretação e limitações.	Generalizando o estudo de uma única variável, faz-se uma introdução ao estudo dos dados bivariados, insistindo na representação gráfica sob a forma do diagrama de dispersão ou diagrama de pontos. Quando, a partir desta representação, se verificar uma tendência para a existência de uma associação linear entre as duas variáveis em estudo, identifica-se uma medida que quantifica o grau de associação - o coeficiente de correlação, assim como se apresenta um modelo matemático que permitirá, conhecido o valor de uma das variáveis, obter uma estimativa para o valor da outra variável.

(Programa do **10.º ano** de Matemática A de 2001, pág.31)

Considerava-se que a reta de regressão era a reta que melhor se adaptava aos pontos do diagrama de dispersão. Era caraterizada por passar pelo centro de gravidade da nuvem de pontos e por ter o sinal do declive igual ao sinal do coeficiente de correlação. Determinava-se sempre com a calculadora gráfica.

Agora

- Define-se desvio vertical, e, de um ponto $P(x_i, y_i)$ (que se pretende que seja da nuvem de pontos) em relação a uma reta $t\colon y = ax + b$ como sendo a distância afetada de um sinal, do ponto P (do diagrama de dispersão) ao ponto T, da reta t que tem a mesma abcissa que P. O sinal é positivo quando P está *acima* da reta e é negativo quando P estiver *abaixo* da reta.



- Prova-se que se a soma dos desvios verticais for zero, a reta passa pelo ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ e vice-versa
- Considera-se $f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$. Para encontrar o mínimo de f, dado que o estudo de extremos de funções de duas variáveis não faz parte do programa do ensino secundário, opta-se por restringir a pesquisa ao conjunto das retas com ordenada na origem da forma $\boldsymbol{b = \bar{y} - a\bar{x}}$, a que corresponde **uma soma dos desvios verticais igual a zero**. A função acima passa a depender apenas de uma variável e tem um mínimo absoluto quando $\boldsymbol{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$
- A **reta de mínimos quadrados** é aquela para a qual é mínima a soma dos quadrados dos desvios verticais.
- **Determina-se, em casos concretos** de amostras de dados bivariados, depois de indicar qual é a «variável explicativa» (variável independente), qual é a «variável resposta» (variável dependente) e se é adequada a interpretação da relação entre as duas variáveis através do ajustamento da reta dos mínimos quadrados. Esta interpretação decorre de uma análise visual e intuitiva.
- Por fim define-se «**coeficiente de correlação linear**»:

$$\boldsymbol{r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}}$$

Como o declive da reta de mínimos quadrados é dado por:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{SS_x}$$

estabelece-se a relação entre o coeficiente de correlação e o declive da reta

$$r = a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$$

O coeficiente de correlação tem, pois, sinal idêntico ao do declive da reta de mínimos quadrados e refere-se que a associação linear entre as variáveis é tanto mais forte quanto mais próximo de 1 estiver $|r|$.

Atividades práticas sugeridas na ação sobre Metas Curriculares (Caderno de Apoio pág.39 e 40)

1. Considere um referencial ortogonal do plano e os pontos $A(2,3)$, $B(4,5)$ e $C(6,4)$ e as amostras $\underset{\sim}{x} = (2,4,6)$ e $\underset{\sim}{y} = (3,5,4)$.
   - 1.1. Determine as médias de $\underset{\sim}{x}$ e de $\underset{\sim}{y}$.
   - 1.2. Escreva a expressão $f(a) = \sum_{i=1}^{3}(y_i - ax_i - b)^2$, onde $b = \bar{y} - a\bar{x}$, sem utilizar o símbolo de somatório.
   - 1.3. Determine $f'(a)$.
   - 1.4. Determine o valor de a para o qual a função f atinge um mínimo absoluto e designe-o por m.
   - 1.5. Verifique que $m = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - 3\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$.
   - 1.6. Represente os pontos A, B e C e esboce a reta de mínimos quadrados desta sequência de pontos.

Resolução:

1.1. Temos $\underset{\sim}{x} = (2,4,6)$ e $\underset{\sim}{y} = (3,4,5)$, logo $\bar{x} = \frac{2+4+6}{3} = 4$ e $\bar{y} = \frac{3+5+4}{3} = 4$.

1.2. Sabemos que $b = \bar{y} - a\bar{x} = 4 - 4a$. Logo,

$$f(a) = \sum_{i=1}^{3}(y_i - ax_i - b)^2 = (3 - 2a + 4a - 4)^2 + (5 - 4a + 4a - 4)^2 + (4 - 6a + 4a - 4)^2$$
$$= (2a - 1)^2 + 1 + (-2a)^2 = 4a^2 - 4a + 1 + 1 + 4a^2 = 8a^2 - 4a + 2$$

1.3. $f'(a) = 16a - 4$

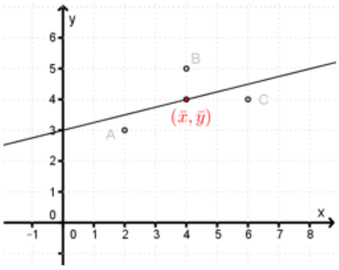
1.4. $m = a = \frac{1}{4}$

1.5. Começamos por calcular:

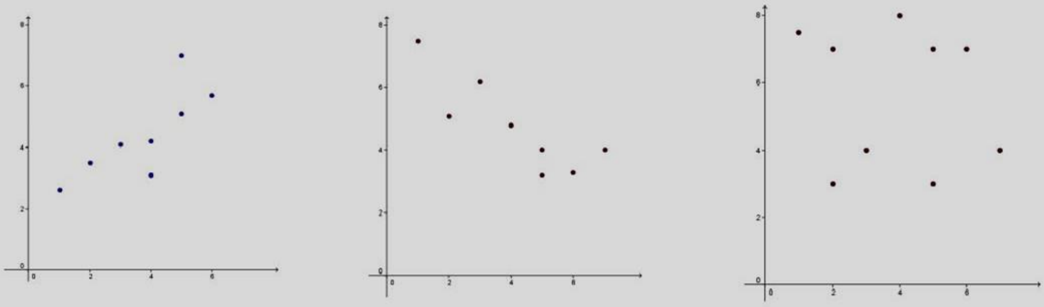
$$SS_x = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - n\overline{x}^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 - 3\times 4^2 = 4 + 16 + 36 - 3\times 16 = 56 - 48 = 8.$$

Logo, $m = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot y_i - 3\cdot \overline{x}\cdot\overline{y}}{SS_x} = \dfrac{6+20+24-48}{8} = \dfrac{50-48}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.

1.6. Sabemos que $a = \dfrac{1}{4}$ e que $b = 4 - 4\times\dfrac{1}{4} = 3$. Logo $y = \dfrac{1}{4}x + 3$ é a equação da reta de mínimos quadrados desta sequência de pontos.



Nos gráficos estão representadas três nuvens de pontos. Faça corresponder a cada gráfico um dos coeficientes de correlação indicados $r_1 = -0{,}25$, $r_2 = 0{,}76$ e $r_3 = -0{,}84$ e justifique.



Resolução:

$r_2 = 0.76$ $\quad$ $r_3 = -0.84$ $\quad$ $r_1 = -0.25$

Comentário:

Para além destes exercícios nos quais se pretende que os alunos se apropriem dos conceitos e apliquem as fórmulas, devem continuar a resolver-se, paralelamente, os exercícios "tradicionais" em que se usa a calculadora gráfica ou uma folha de cálculo.

4. O Sr. Silva aquece a sua casa com gás natural. A quantidade de gás utilizada depende da temperatura exterior e o Sr. Silva pretende fazer um estudo dos gastos durante os 9 meses em que se observam menores temperaturas, para poder estabelecer uma previsão para os gastos em função da temperatura exterior. Na tabela junta estão registadas as temperaturas médias observadas em cada um dos meses (em graus Celsius) e o respetivo volume de gás despendido pelo Sr. Silva (em metros cúbicos).

mês	out	nov	dez	jan	fev	mar	abr	mai	jun
temperatura	16,1	12,4	10,3	8,9	10,1	12,8	13,2	15,9	16,4
Volume de gás	0,01	0.10	0,24	0,26	0,19	0,09	0,05	0,03	0,01

4.1. Qual deve ser a variável explicativa e a variável resposta?

4.2. Utilize uma folha de cálculo ou uma calculadora gráfica para responder às seguintes questões:

4.2.1. Represente os dados num referencial ortogonal e diga se é razoável a existência de uma relação linear entre estas duas variáveis.

4.2.2. Determine a média dos valores de cada uma das amostras representadas. Apresente os resultados com arredondamento às décimas.

4.2.3. Determine o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos. Apresente o resultado com arredondamento às décimas.

4.2.4. Determine a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados.

4.2.5. Utilizando a equação obtida em 4.2.4. determine qual o consumo esperado para um mês em que a temperatura média seja de 7°C.

(Caderno de Apoio, pág.40)

Também é importante que os alunos se apercebam que, se tiverem um número elevado de registos, podem fazer estimativas (ou previsões) a partir da determinação da reta de mínimos quadrados (reta de regressão) e que isso se faz, na realidade, em diversas áreas do conhecimento. Quantos mais pontos tiverem no diagrama de dispersão, mais correta será a interpretação e melhor será a "inferência estatística" o que, na prática, só é possível recorrendo ao uso de meios tecnológicos.

Capítulo 4 – 12.º ano – Matemática A

O Cálculo Combinatório é a área da Matemática dedicada à realização eficiente de contagens. Começa-se por estabelecer algumas propriedades das operações sobre conjuntos e, em seguida, estudam-se progressivamente arranjos, com ou sem repetição, permutações e combinações, o que permite, em situações muito distintas, efetuar contagens de forma expedita. É igualmente introduzido o binómio de Newton e o triângulo de Pascal, deduzindo-se algumas propriedades dos coeficientes binomiais.

(Programa e Metas Curriculares de Matemática A, pág.21)

4.1. Cálculo Combinatório (CC 12) – 18 aulas

- Propriedades das operações sobre conjuntos
- Introdução ao cálculo combinatório
- Triângulo de Pascal e Binómio de Newton

Antes

A abordagem das propriedades das operações sobre conjuntos era sempre feita, a nível elementar, através de diagramas de Venn.

Agora

Pretende-se que os alunos, além de reconhecerem as propriedades dos conjuntos através dos diagramas de Venn, consigam fazer a passagem da linguagem de conjuntos para a linguagem das condições e vice-versa. Sugerem-se algumas demonstrações mais formais e que, nesta altura, se **retome e reveja o domínio da Lógica lecionado no início do 10º ano**.

Por exemplo, para definir quando é que, dados dois conjuntos A e B, se tem $A \subset B$, pode pedir-se que o aluno

1. *Demonstre sucessivamente os resultados expressos nas seguintes alíneas:
   1.1 Sendo p e q proposições, $p \Rightarrow q$ é equivalente a $(p \wedge q) \Leftrightarrow p$ e também a $(p \vee q) \Leftrightarrow q$.
   1.2 Dados conjuntos A e B, $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$ e se e somente se $A \cup B = B$.
   1.3 O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

(Ex. do Caderno de Apoio do 12.º ano, pág. 2)

As propriedades das operações sobre conjuntos que devem ser trabalhadas são: comutativa, associativa, de existência de elemento neutro e elemento absorvente, idempotência da união e da interseção e as propriedades distributivas da união em relação à interseção e da interseção em relação à união.

Provam-se as «Leis de De Morgan para conjuntos» e a distributividade do produto cartesiano de conjuntos relativamente à união.

É importante assinalar que o processo geral para contar o número de elementos de um conjunto, consiste em estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto que se pretende contar e um conjunto cujo cardinal é conhecido, mas que isto é, apenas, a formalização dos processos elementares de contagem.

À semelhança do que se passava no Antigo Programa, devem ficar a ser conhecidas noções elementares da análise combinatória: cardinal de um conjunto, conjuntos equipotentes, cardinal da união de conjuntos disjuntos, cardinal do produto cartesiano de conjuntos finitos, arranjos com repetição, número de subconjuntos de um conjunto finito, permutações, fatorial de um número inteiro não negativo, arranjos sem repetição e combinações.

Os alunos devem reconhecer que:

- ${}^{n}A'_{p} = n^{p}$ (arranjos completos, ou com repetição, de n p a p) é o número de sequências de p elementos (em que podem aparecer elementos repetidos) que se podem constituir com os objetos de um conjunto com cardinal n, $(n, p \in \mathbb{N}, n \geq p)$. Também corresponde ao número de maneiras diferentes de efetuar p tiragens sucessivas de um objeto de um conjunto constituído por n elementos, repondo o objeto no conjunto após cada tiragem. A ordem da tiragem (posição do objeto na sequência) é importante.

1. Conte quantas sequências diferentes se podem formar inserindo 4 missangas num fio, sabendo que as missangas têm 3 cores possíveis: vermelho, verde e azul.

(Ex. do Caderno de Apoio do 12.º ano, pág. 6)

- $\# \mathcal{P}(E) = 2^{\# E}$ em que $\mathcal{P}(E)$ é o conjunto formado por todos os subconjuntos de E.

1. Considere um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ com 3 elementos.
   1.1. Determine em extensão todas as partes não vazias de X. Quantos subconjuntos tem X?

(Ex. do Caderno de Apoio do 12.º ano, pág. 6)

- $P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$ (permutações de n elementos) é o número de formas de ordenar um conjunto com n elementos.($n > 1; 0! = 1; 1! = 1$)

  Ex: Sete amigos (4 rapazes e 3 raparigas) vão ao cinema, ficando sentados na mesma fila, em lugares consecutivos. De quantas maneiras se podem sentar de modo que não fiquem dois rapazes juntos nem duas raparigas juntas?

  Res.: $P_3 \times P_4 = 3! \times 4! = 144$

- ${}^nA_p = \frac{n!}{(n-p)!}$ (arranjos simples, ou sem repetição, de n p a p) é o número de "amostras" ordenadas (sequências) de p elementos diferentes que se podem constituir com uma "população" de n elementos (conjunto com cardinal n; $n, p \in \mathbb{N}, n \geq p$). Corresponde ao número de maneiras diferentes de efetuar p extrações sucessivas de um objeto de um conjunto constituído por n elementos, sem repor o objeto retirado no conjunto aonde se fazem as extrações.

1. Dez atletas vão fazer uma corrida. Conte de quantas maneiras diferentes se poderão colocar três deles no pódio.

(Ex. do Caderno de Apoio do 12.º ano, pág. 6)

- ${}^nC_p = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$ (combinações de n elementos p a p; $n, p \in \mathbb{N}, n \geq p$) é o número de subconjuntos de p elementos de um conjunto com cardinal n. Também corresponde ao número de maneiras diferentes de escolher p objetos de entre um conjunto constituído por n objetos. Nesta contagem, a ordem da escolha não é considerada.

15. Considere os pontos (distintos) A, B, C, D e E pertencentes a uma circunferência. Quantas cordas existem com extremos nestes pontos?

(Ex. do Caderno de Apoio do 12.º ano, pág. 12)

Muitos dos problemas propostos podem e devem resultar da análise de jogos conhecidos.

1. Considere a experiência de repartir um baralho de 52 cartas pelo João e pela Joana. Ao João dão-se 10 cartas e a Joana fica com as restantes.
   1.1. Quantos conjuntos diferentes, de 10 cartas, pode o João receber?
   1.2. Quantos conjuntos diferentes pode a Joana receber?
   1.3. Justifique que as duas alíneas anteriores têm o mesmo resultado e traduza essa igualdade usando combinações.

(Ex. do Caderno de Apoio do 12.º ano, pág. 10)

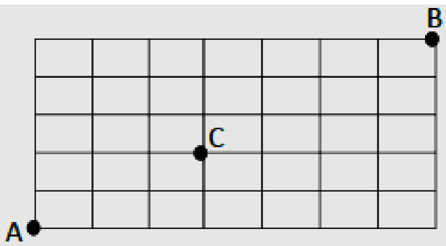
Outro exemplo: Quantas peças têm um jogo de dominó tradicional?

Cada peça tem dois números que podem variar de zero a seis. As que têm números diferentes são ${}^{7}C_2 = 21$ e as peças que têm números iguais ("doubles") são 7. Assim, um jogo tradicional de dominó tem 28 peças (=21+7).

Aqui é conveniente mostrar, por outro processo, como se pode determinar número de diagonais de um polígono com n lados (${}^{n}C_2 - n$) ou o número de apertos de mão que são dados quando n pessoas se encontram e se cumprimentam todas entre si (${}^{n}C_2$), casos que já devem ter sido "contados" e demonstrados (a propósito do estudo das sucessões no 11.º ano) e que devem ser retomados.

O Triângulo de Pascal e Binómio de Newton são tratados neste novo Programa de forma análoga à que era feita no antigo Programa.

20. Quantos caminhos existem, seguindo as linhas da quadrícula, que liguem o ponto A ao ponto B passando por C e sem andar da direita para a esquerda nem de cima para baixo?



(Ex. do Caderno de Apoio do 12.º ano, pág. 15)

1. Determine os valores possíveis de n tais que ${}^{11}C_{n+1} = {}^{11}C_8$.

2. O sexto e o sétimo elementos de uma linha do triângulo de Pascal são iguais. Qual é o elemento central da linha seguinte?

3. Determine ${}^{11}C_{p+1} + {}^{11}C_{p+2} + {}^{12}C_{p+3}$ sabendo que ${}^{13}C_{p+3} = 1716$ e que $p < 8$.

6. Determine o desenvolvimento das seguintes expressões utilizando a fórmula do binómio de Newton e simplificando tanto quanto possível cada uma das parcelas assim obtidas.
   6.1 $(x-2)^5$
   6.2 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^4$
   6.3 $\left(\frac{x}{3}-x^2\right)^5$

7. Determine, para $x > 0$, o 6.º termo do desenvolvimento pelo binómio de Newton de cada uma das seguintes expressões e apresente-o na forma mais simplificada.
   7.1 $\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^6$
   7.2 * $\left(x\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}\right)^8$

8. *Considere a seguinte expressão $A(x) = \left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^6$. Determine, relativamente ao desenvolvimento de $A(x)$ pelo Binómio de Newton, o termo:
   8.1 independente de x.
   8.2 de grau 3.

(Ex. do Caderno de Apoio do 12.º ano, pág. 16)

Comentário:

Neste domínio, o que deve ser lecionado sobre cálculo combinatório, Triângulo de Pascal e Binómio de Newton, não apresenta diferenças em relação ao anterior Programa.

Após uma primeira abordagem mais restritiva elaborada no 9.º ano, pretende-se agora, no domínio Probabilidades, estudar de um modo mais geral a noção de probabilidade, começando por se introduzir a noção de função de probabilidade definida no conjunto das partes de um conjunto finito, da qual a lei dita de Laplace – estudada no Ensino Básico – é um caso particular, relacionado com situações de equiprobabilidade. É igualmente abordada a noção de probabilidade condicionada e de independência de acontecimentos, apresentando-se em particular o Teorema da probabilidade total.

(Programa e Metas Curriculares de Matemática A, pág.21)

4.2. Probabilidades (PRB 12) – 20 aulas

- Espaços de probabilidade
- Probabilidade condicionada

Antes

O desenvolvimento deste tema passava por dar:
experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos. Operações sobre acontecimentos.
Aproximações conceptuais para Probabilidade: aproximação frequencista de probabilidade; definição clássica de probabilidade ou de Laplace; definição axiomática de probabilidade (caso finito); propriedades da probabilidade.
Probabilidade condicionada e independência; probabilidade da interseção de acontecimentos. Acontecimentos independentes.
Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades. Modelo Binomial e Modelo Normal.

Agora

A Introdução ao cálculo das probabilidades está concentrada no 9º ano (o que não acontecia). Faz parte do último domínio do 9º ano, Organização e Tratamento de Dados (OTD9-3).

Desaparece a definição frequencista de probabilidade e a definição de axiomática de probabilidade.

Neste tema, no Programa de 2001 tinham de ser definidas as operações sobre conjuntos o que agora já não é necessário uma vez que a Teoria dos Conjuntos é um dos domínios do 10.º ano.

Os modelos de distribuição de probabilidades, o modelo Binomial e o modelo Normal (ou de Gauss) também não são aqui lecionados.

Define-se «espaço de probabilidade» como sendo o terno $(E, \mathcal{P}(E), P)$ em que o conjunto finito E é o «espaço amostral» ou «universo de resultados», $\mathcal{P}(E)$ chama-se o «espaço dos acontecimentos» e é o conjunto das partes de E e P é uma função de domínio $\mathcal{P}(E)$, de valores não negativos tal que $P(E) = 1$ e, para $A, B \in \mathcal{P}(E)$ disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, que se designa «probabilidade do acontecimento».

Outra designação nova que aparece é a «monotonia da probabilidade», descritor 1.7 – PRB 12:

7. Provar, dado um conjunto finito E, uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$, que se $A \subset B$, $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$, justificando que $P(A) \leq P(B)$, e designar este último resultado por «monotonia da probabilidade».

Também merece destaque o «Teorema da probabilidade total», descritor 2.5 – PRB 12:

5. #Provar, dado um conjunto finito E, uma probabilidade P no conjunto $\mathcal{P}(E), N \in \mathbb{N}$ e uma partição $\{E_1, E_2, \ldots, E_N\}$ de E constituída por acontecimentos de probabilidade não nula, que para todo o acontecimento $A \subset E$, $P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \cdots + P(A|E_N)P(E_N)$ e designar este resultado por «Teorema da probabilidade total».

Embora não explicitem indicações metodológicas, parece ser aqui indicado o recurso a tabelas e diagramas de árvore para determinar as probabilidades de alguns acontecimentos, retomando o 9º ano.

OTD9-3.10-

Utilizar tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore na resolução de problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação das probabilidades de diferentes acontecimentos compostos.

Por exemplo, a resolução do exercício do Caderno de Apoio - PRB12

11. Uma fábrica utiliza três máquinas diferentes para produzir um tipo de peças mas que têm níveis diferentes de eficiência. A máquina A produz metade do total da produção e as máquinas B e C dividem a restante produção em partes iguais. Cerca de $98{,}5\%$ da produção da máquina A não tem qualquer defeito; a máquina B produz cerca de 2% de peças defeituosas e a máquina C tem uma eficiência de 97%.
    11.1. Selecionando aleatoriamente uma peça desse tipo produzida nessa fábrica qual é a probabilidade de que seja defeituosa?
    11.2. Foi selecionada uma dessas peças ao acaso e era defeituosa. Qual é a probabilidade de ter sido produzida pela máquina C?

pode ser abordada de modos diferentes.

1) Utilizando uma tabela de dupla entrada

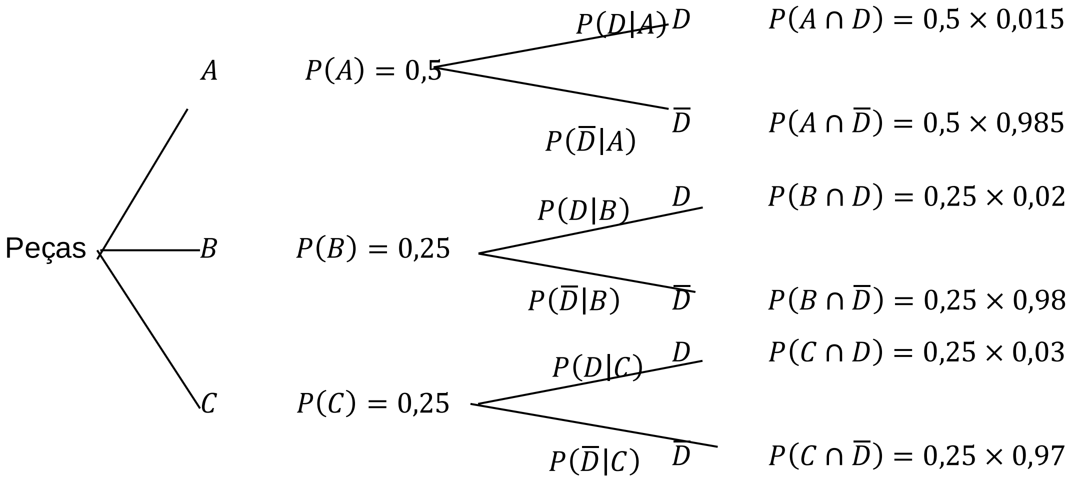
	D	$\overline{D}$	
A	$0{,}015 \times 0{,}5$	$0{,}985 \times 0{,}5$	$0{,}5$
B	$0{,}02 \times 0{,}25$	$0{,}98 \times 0{,}25$	$0{,}25$
C	$0{,}03 \times 0{,}25$	$0{,}97 \times 0{,}25$	$0{,}25$
	$0{,}02$	$0{,}98$	1

11.1 – A probabilidade de, nessa fábrica, ser produzida uma peça defeituosa é 0,02.

11.2 – A probabilidade da peça defeituosa ter sido produzida pela máquina C é $0{,}375$, pois

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}03 \times 0{,}25}{0{,}02} = 0{,}375$$

2) Utilizando um diagrama de árvore



11.1 – A probabilidade de, nessa fábrica, ser produzida uma peça defeituosa é 0,02,

pois $P(D) = 0{,}5 \times 0{,}015 + 0{,}25 \times 0{,}02 + 0{,}25 \times 0{,}03 = 0{,}02$.

11.2 – A probabilidade da peça defeituosa ter sido produzida pela máquina C é $0{,}375$, pois

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}03}{0{,}5 \times 0{,}015 + 0{,}25 \times 0{,}02 + 0{,}25 \times 0{,}03} = 0{,}375$$

3) Utilizando o Teorema da probabilidade total

11.1 – A probabilidade de, nessa fábrica, ser produzida uma peça defeituosa é 0,02, pois

$$P(D) = P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B) + P(D|C) \times P(C) =$$

$$= 0{,}5 \times 0{,}015 + 0{,}25 \times 0{,}02 + 0{,}25 \times 0{,}03 = 0{,}02$$

11.2 – A probabilidade da peça defeituosa ter sido produzida pela máquina C é $0{,}375$, pois

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}03}{0{,}02} = 0{,}375$$

Pode retomar-se a Geometria,

6. Considere um octógono regular.
   6.1. Selecionando dois vértices ao acaso, qual a probabilidade de o segmento por eles determinado:
      6.1.1 corresponder a um lado do octógono?
      6.1.2 passar pelo centro do octógono?
   6.2. *Selecionando três vértices ao acaso, qual a probabilidade de o triângulo por eles determinado ser retângulo?

(Ex. do Caderno de Apoio do 12ºano, pág. 19)

Comentário:

Este último exemplo não é fácil para muitos dos alunos. Problemas deste tipo devem ser trabalhados e é preciso rever algumas definições (três pontos não colineares definem um plano, por dois pontos passa uma única reta, lados, diagonais,…).

Antes, era definida uma axiomática das probabilidades a partir da qual se estabeleciam as propriedades das probabilidades. Como neste Programa não é estabelecida uma axiomática para as probabilidades, torna-se necessário provar a «monotonia da probabilidade» por ser um teorema novo para os alunos.

Desaparece do ensino obrigatório a referência à curva de Gauss. Dado que esta curva é muito usada em artigos de diversas áreas do conhecimento, o professor pode, no 10.º ano, quando tratar as propriedades da variância e desvio-padrão e falar nas noções de localização e dispersão (EST 10), abordar as caraterísticas da "curva normal".

No domínio Funções Reais de Variável Real, completa-se o estudo dos limites de sucessões e de funções. Continua-se ainda o estudo das funções contínuas e das funções diferenciáveis, enunciando-se, em particular, o Teorema de Weierstrass e o Teorema dos valores intermédios (ou de Bolzano-Cauchy). Relaciona-se também o sinal da derivada de segunda ordem de uma função com o sentido da concavidade do respetivo gráfico, aproveitando-se para, no contexto da cinemática do ponto, interpretar a derivada de segunda ordem das funções posição como uma aceleração. Aborda-se a questão da utilização das calculadoras gráficas, em particular para a obtenção de valores aproximados de soluções de equações envolvendo funções reais de variável real, aproveitando-se os conhecimentos adquiridos acerca do estudo analítico de funções para justificar a validade de determinados procedimentos e analisar criticamente os diversos usos que podem ser feitos deste tipo de tecnologias neste contexto.

(Programa e Metas Curriculares de Matemática A, pág.21)

4.3. Funções Reais de Variável Real (FRVR 12) – 34 aulas

- Limites e Continuidade
- Derivada de segunda ordem, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão
- Aplicação do cálculo diferencial à resolução de problemas

Este domínio inicia-se retomando o tema das sucessões lecionado no 11ºano. Provam-se os Teoremas de comparação para sucessões, o Teorema das sucessões enquadradas (que, no Programa anterior aparecia no tema das sucessões, no 11ºano) e o **Teorema das funções enquadradas**:

- Se, a partir de certa ordem, para duas sucessões convergentes (u_n) e (v_n), se tem $u_n \leq v_n$, então
  $$lim\ u_n \leq lim\ v_n$$
- Se, a partir de certa ordem, se tem $u_n \leq v_n$ e $lim\ u_n = +\infty$ então $lim\ v_n = +\infty$
- Se, a partir de certa ordem, se tem $u_n \leq v_n$ e $lim\ v_n = -\infty$ então $lim\ u_n = -\infty$

– Se, para duas sucessões convergentes (u_n) e (v_n), se tem $lim\ u_n = lim\ v_n = l$ e, a partir de certa ordem, $u_n \leq w_n \leq v_n$, então (w_n) é convergente e $lim\ w_n = l$

e também

- Dadas duas funções reais de variável real, f e g de domínio D e a um ponto aderente a D, se $\forall x \in D, f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$,

  se $\forall x \in D, f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, então $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$,

  se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l$ e se $\forall x \in D, f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, então $\lim_{x \to a} h(x) = l$

Depois, os alunos devem ficar a conhecer e saber aplicar (e, tal como sucedia no Programa de 2001, a demonstração também não é requerida por necessitar de noções de matemática superior),

o **Teorema de Bolzano-Cauchy ou Teorema dos Valores intermédios**: uma função contínua num intervalo fechado de $\mathbb{R}$ não passa de um valor a outro sem tomar todos os valores intermédios;

e

o **Teorema de Weierstrass**: uma função contínua num intervalo fechado de $\mathbb{R}$ admite, nesse intervalo, um máximo e um mínimo absolutos.

Define-se derivada de segunda ordem e relaciona-se o sinal desta com o sentido da concavidade do gráfico da função. Nesta altura, os alunos devem ser capazes de fazer o estudo completo e de esboçar os gráficos, utilizando métodos exclusivamente analíticos, de algumas das funções já estudadas como é exemplo o exercício proposto no Caderno de Apoio (pág.27):

1. Esboce o gráfico das funções definidas pelas seguintes expressões:
   1.1 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
   1.2 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$
   1.3 $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
   1.4 $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$
   1.5 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
   1.6 $f(x) = \frac{|x+3|}{2x+1}$

Pretende-se que os alunos esbocem o gráfico começando por determinar o respetivo domínio e, sempre que possível, os zeros, os intervalos de monotonia, os extremos locais e absolutos, o sentido das concavidades, os pontos de inflexão e as assíntotas ao respetivo gráfico.

Tal como no Programa anterior, está prevista a resolução de problemas de otimização envolvendo funções diferenciáveis.

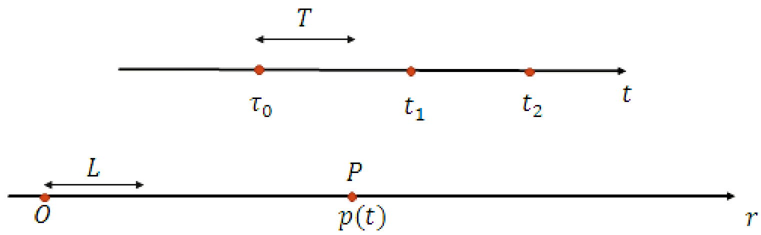
Recomenda-se ainda, neste Programa de forma explícita (descritor FRVR12-5.4), a resolução de problemas que envolvem a interpretação cinemática das derivadas de certas funções: funções posição, velocidades médias e velocidades instantâneas, acelerações médias e acelerações instantâneas e mudanças de unidades de aceleração.

Define-se, no descritor FRVR12-4.9 (quando todas as quantidades mencionadas existirem):

- a «aceleração média de P no intervalo na unidade $[t_1, t_2]$ na unidade $\frac{L}{T^2}$» como a taxa média de variação de p' nesse intervalo:, utilizando métodos exclusivamente analíticos

$$\frac{p'(t_2) - p'(t_1)}{t_2 - t_1}$$

- a «aceleração instantânea de P no instante t na unidade $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2}$ por $\mathrm{p}''(\mathrm{t})$.



Exemplo:

4. *Uma partícula α é introduzida num acelerador linear de partículas e submetida desde o instante inicial a uma aceleração constante de tal forma que a respetiva velocidade sofre um acréscimo de 1000m/s para 5000m/s em $0{,}001$ segundos, instante em que choca com a parede do acelerador. Determine:
   4.1 a aceleração da partícula.
   4.2 o espaço percorrido pela partícula no referido período de $0{,}001$ segundos.

(Caderno de Apoio, página 28)

<u>Sugestão de resolução:</u>

4.1 Sendo p a função posição da partícula.

$p'\left(t_1\right) = 1000\, m/s \qquad t_2 = t_1 + 0{,}001$

$p'(t_1 + 0{,}001) = 5000\, m/s$

A aceleração média da partícula no intervalo de tempo $[t_1\,, \; t_1 + 0{,}001]$ é dada por

$$\frac{p'(t_1+0{,}001)-p'(t_1)}{t_1+0{,}001-t_1} = \frac{4000}{0{,}001} = 4000000\ m/s^2$$

Como o acelerador é linear a aceleração é constante de $4 \times 10^6 \frac{m}{s^2}$

4.2 $v_m = \frac{v_0+v_1}{2} = \frac{1000+5000}{2} = 3000\, ms^{-1}$

$s = v_m \times \Delta t = 3000 \times 0{,}001 = 3\, m$

Ou, pela equação do movimento,

$\Delta x = \Delta t \times v_0 + \frac{1}{2} \times a \times \Delta t^2 = 0{,}001 \times 1000 + \frac{1}{2} \times 4 \times 10^6 \times 0{,}001^2 = 1 + 2 \times 10^6 \times 10^{-6} =$

$= 3\, m$

Neste domínio está ainda prevista a utilização da calculadora gráfica para determinar valores aproximados de equações na resolução de problemas em que é possível justificar a existência das referidas soluções, utilizando propriedades conhecidas das funções contínuas, como o Teorema dos Valores Intermédios ou outras propriedades analíticas já estabelecidas.

Exemplos da página 30 do Caderno de Apoio:

2. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = 1 + 2\sin x$ e $g(x) = \frac{x+1}{2}$.
   - 2.1 Determine o contradomínio de f.
   - 2.2 Justifique que se o gráfico de g intersetar o gráfico de f, a abcissa do ponto de interseção pertencerá ao intervalo $[-3{,}5]$.
   - 2.3 Considere a função h definida por $h(x) = f(x) - g(x)$. Determine $h(-3), h(-2)$, $h(0)$ e $h(3)$ e identifique três intervalos disjuntos de números reais aos quais pertença pelo menos um zero da função h.
   - 2.4 Utilizando a calculadora gráfica, determine valores aproximados às décimas para as soluções da equação $f(x) = g(x)$.

<u>Sugestão de resolução:</u>

2.1 $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq senx \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 2 \leq 1 + 2senx \leq 1 + 2 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow$
$CD_f = [-1{,}3]$

2.2 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 + 2senx = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow senx = \frac{x-1}{4}$

Como $-1 \leq senx \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x-1}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$

ou seja, a abcissa do ponto de interseção irá pertencer ao intervalo $[-3{,}5]$

2.3 $h(x) = senx - \frac{x-1}{4}$, h é uma função contínua porque é a diferença de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$

$h(-3) = sen(-3) + 1 > 0$

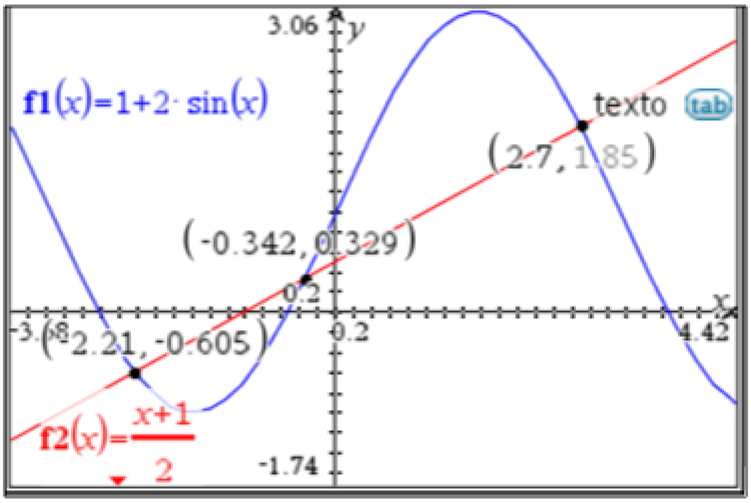
$h(-2) = sen(-2) + \frac{3}{4} < 0$

$h(0) = \frac{1}{4} > 0$

$h(3) = sen(3) - \frac{1}{2} < 0$

Os três intervalos solicitados são: $]-3,-2[$, $]-2{,}0[$ e $\left]\frac{1}{4}, 3\right[$

2.4



s valores pedidos são: $-2{,}2$; $-0{,}3$ e $2{,}7$.

4. Prove que a equação $\sin(x) = x + 1$ tem uma solução no intervalo $[-\pi, 0]$ e, utilizando uma calculadora gráfica, indique, justificando, um valor, aproximado às décimas, dessa raiz.

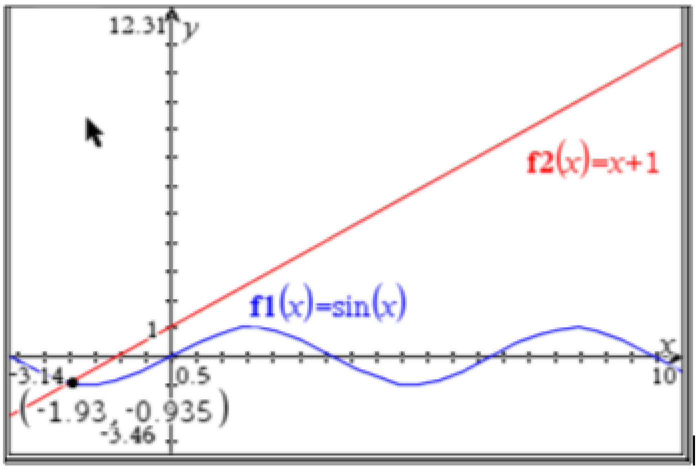
$f(x) = senx - x - 1$ é uma função contínua em $[-\pi, 0]$

$f(-\pi) = sen(-\pi) + \pi - 1 = \pi - 1 > 0$

$f(0) = sen(0) - 0 - 1 = -1 < 0$

Então, pelo Teorema dos Valores Intermédios, f tem um zero no intervalo $[-\pi, 0]$.

Vamos determinar um valor aproximado dessa raiz com o auxílio da calculadora gráfica:



Um valor aproximado da raiz é $-1{,}9$.

Comentário:

Neste domínio é imprescindível o uso da calculadora gráfica, mas o professor deve alertar os alunos para as limitações do uso deste tipo de recursos tecnológicos e realçar em todas as aplicações que, quer as representações gráficas, quer os valores encontrados, devem ser relacionados com o conhecimento teórico que permita justificar os resultados observados.

Há, no entanto a referir que, embora este Novo Programa a “coloque de lado” durante a maior parte do percurso do ensino e recomende o seu uso de modo muito criterioso, os alunos devem ir aprendendo a manejar a calculadora gráfica desde o início do ensino secundário. Só assim será possível atingir os objetivos agora determinados.

O domínio Trigonometria e Funções Trigonométricas, no 12.º ano, é dedicado ao cálculo das derivadas das funções seno e cosseno, após o estabelecimento de algumas fórmulas trigonométricas. É a oportunidade ideal para se introduzir o estudo dos osciladores harmónicos, analisando-se uma equação diferencial característica que rege o respetivo comportamento e verificando-se que, em particular, uma tal equação pode ser deduzida da Lei de Hooke, desde que se admita a Relação Fundamental da Dinâmica, o que permite evidenciar o caráter de oscilador harmónico de uma mola não submetida a atrito.

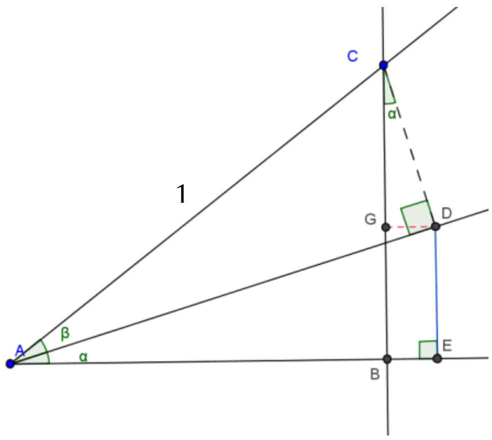
(Programa e Metas Curriculares de Matemática A, pág.21)

4.4. Trigonometria e Funções Trigonométricas (TRI 12) – 26 aulas

- Diferenciação de funções trigonométricas
- Aplicação aos osciladores harmónicos

Este domínio deve iniciar-se com uma breve revisão das razões trigonométricas. Em seguida estabelecem-se as fórmulas trigonométricas da soma, da diferença e da duplicação de ângulos. Os conteúdos abordados devem ser enquadrados na História da Matemática.

Pretende-se que a dedução das fórmulas do seno e do cosseno da soma de dois ângulos seja feita recorrendo à geometria sintética[23], apresentando pelo menos um exemplo.



O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B;

$\overline{AC} = 1$

D é a projeção ortogonal de C sobre a semirreta que é comum aos dois ângulos α e β;

E é a projeção ortogonal de D sobre a reta suporte do lado $[AB]$;

G é a projeção ortogonal de D sobre o lado $[AB]$;

[23] Na geometria sintética, também chamada de Euclides ou geometria pura, não se aplica o uso de coordenadas.

Os triângulos $[AED]$ e $[CGD]$ são semelhantes e portanto

$$\measuredangle GCD = \measuredangle BAD = \alpha$$

.

Como

$$\boxed{\begin{aligned} cos\beta &= \overline{AD} \\ sen\beta &= \overline{CD} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} sen\alpha &= \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{CD}} \\ cos\alpha &= \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CD}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\overline{CB} = \overline{CG} + \overline{GB} = \overline{CG} + \overline{DE}}$$

$$sen(\alpha + \beta) = \overline{CB} = \overline{CD}cos\alpha + \overline{AD}sen\alpha = sen\beta \times cos\alpha + cos\beta \times sen\alpha$$

$$cos(\alpha + \beta) = \overline{AB} = \overline{AE} - \overline{BE} = \overline{AE} - \overline{GD} = \overline{AD}cos\alpha - \overline{CD}sen\alpha = cos\beta cos\alpha - sen\beta sen\alpha$$

Depois deve-se deduzir a fórmula relativa ao cosseno da diferença de dois ângulos, $cos(\alpha - \beta)$, utilizando o conceito e as propriedades do produto interno de vetores. Esta era a metodologia usada no Programa de 2001.

Segue-se,

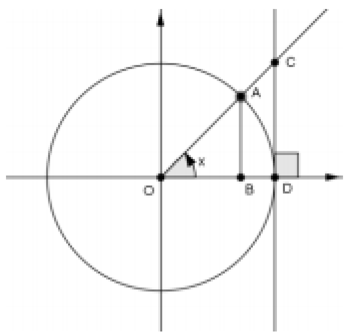
TRI12-2 – *Calcular a derivada de funções trigonométricas (2.1 a 2.3)*

1. **+Reconhecer** que para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \leq x \leq \tan x$ e **provar** que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, referindo este limite como «limite notável».

2. **Provar** que as funções seno e cosseno são **diferenciáveis** e que para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$ e $\cos' x = -\sin x$.

3. **Provar** que a função tangente é **diferenciável** no respetivo domínio $D_{\tan}$ e que para todo o $x \in D_{\tan}$, $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Considere-se a circunferência trigonométrica e seja $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Designando por B a projeção ortogonal de A no eixo das abcissas e por C o ponto da semirreta $\dot{O}A$ cuja projeção ortogonal no eixo das abcissas é o ponto $D(1{,}0)$, tem-se

$$A_{\Delta[OCD]} = \frac{1 \times tgx}{2}$$

$$A_{\Delta[OAD]} = \frac{1 \times senx}{2}$$

Observando a figura,

$$A_{\Delta[OAD]} \leq A_{setor\ circular\ OAD} \leq A_{\Delta[OCD]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{senx}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{tgx}{2}$$

$$\Leftrightarrow senx \leq x \leq tgx$$

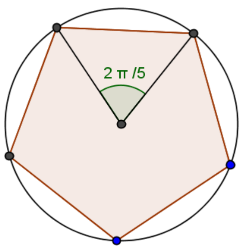
$$\Leftrightarrow senx \leq x \leq \frac{senx}{cosx}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{senx} \leq \frac{1}{cosx}$$

Aplicando o Teorema das funções enquadradas chega-se ao limite notável.

Talvez seja agora ocasião para definir rigorosamente a medida do **comprimento de uma circunferência**, dando continuidade à abordagem feita na Trigonometria (referido em TRI 11, pág. 55), como sendo o supremo das medidas das linhas poligonais inscritas no arco da circunferência.

Podemos, por exemplo, começar por determinar o perímetro de um pentágono regular (de lado l) inscrito numa circunferência (de raio r).

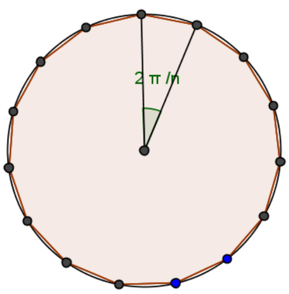


Tem-se

$$sen\frac{\pi}{5} = \frac{\frac{l}{2}}{r} \Leftrightarrow l = 2r \times sen\frac{\pi}{5}$$

$$P_{pentágono} = 5 \times 2r \times sen\frac{\pi}{5}$$

Pensando num polígono com n lados:



$$sen\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{\frac{l}{2}}{r}\Leftrightarrow l=2r\times sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$P_{polígono\ com\ n\ lados}=n\times 2r\times sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Quando $n\to+\infty$,

$$lim\left(n\times sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)=lim\frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{\frac{\pi}{n}\to 0}\frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}\times\pi=1\times\pi=\pi$$

Logo

$$\lim_{n\to+\infty}P_{polígono\ com\ n\ lados}=2\pi r$$

Também neste domínio do 12º ano e conhecidas as propriedades diferenciais das funções trigonométricas aborda-se uma classe de problemas relacionados com estas funções, com o propósito de se analisarem algumas **aplicações** da Matemática e exemplos relevantes da importância da Matemática na **modelação** da realidade física (TRI12-3):

3. *Relacionar osciladores harmónicos e a segunda lei de Newton*

    1. Designar por «oscilador harmónico» um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica em determinado intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t\in I$, seja dada por uma expressão da forma $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, onde $A>0$, $\omega>0$ e $\varphi\in[0,2\pi[$, designar estas constantes, respetivamente, por «amplitude», «pulsação» e «fase», justificar que a função x é periódica de período $T=\frac{2\pi}{\omega}$ e designar $f=\frac{1}{T}$ por «frequência» do oscilador harmónico.
    2. Esboçar o gráfico de funções definidas por $f(x)=a\sin(bx+c)+d$, $f(x)=a\cos(bx+c)+d$ e $f(x)=a\tan(bx+c)+d$, onde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $a,b\neq 0$.
    3. Saber, dado um ponto material P de massa m colocado na extremidade de uma mola cuja outra extremidade se encontra fixa, que tomando por origem da reta numérica em que P se desloca o respetivo ponto de equilíbrio, a abcissa $x(t)$ da posição de P no instante t satisfaz a equação $mx''(t)=-\alpha x(t)$ $(\alpha>0)$, intepretando o termo $-\alpha x(t)$ como a força exercida pela mola sobre P («lei de Hooke»), designar a igualdade desta força com o produto da massa pela aceleração de P por (um caso particular da) «segunda Lei de Newton» e resolver problemas envolvendo sistemas massa-mola com estas características.

4. Justificar, dado $\alpha > 0$, que as funções definidas por uma expressão da forma $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\alpha}t + b\right)$, onde A e b são constantes reais, satisfazem a equação diferencial $x'' = -\alpha x$, saber que todas as soluções desta equação são dessa forma, e reconhecer que um sistema constituído por uma mola e por um ponto material P colocado na respetiva extremidade constitui um oscilador harmónico.

(Metas Curriculares de Matemática A, pág.51,52)

Este descritor refere, no caso unidimensional, a Relação Fundamental da Dinâmica. Esta Relação estabelece a proporcionalidade, em cada instante, entre a força a que se encontra submetido um ponto material e a respetiva aceleração, com constante de proporcionalidade igual à massa desse ponto. Sendo um resultado que está, historicamente, na génese do próprio cálculo diferencial, e tendo em conta a importância que o presente Programa confere à modelação do real, este princípio deve ser conhecido pelos alunos, mesmo por aqueles que não frequentaram a disciplina de Física.

(Comentário no Caderno de Apoio, pág.37)

Utilizou-se, no caso unidimensional, a **Relação Fundamental da Dinâmica**. Esta relação estabelece a proporcionalidade, em cada instante, entre a força a que se encontra submetido um ponto material e a respetiva aceleração, com constante de proporcionalidade igual à massa desse ponto.

*A **Relação Fundamental da Dinâmica**, em conjunção com a **Lei de Hooke**, permite evidenciar de forma simples um comportamento de **oscilação harmónica**. Esta lei diz essencialmente que uma **mola**, fixada numa extremidade, exerce sobre um **ponto material** P, de massa $m > 0$, colocado na outra extremidade, uma **força** de intensidade **proporcional** à **distância** $d(P, P_e)$ e de **sentido** igual ao do vetor $\overrightarrow{PP_e}$, onde P_e é a **posição de equilíbrio** que o ponto P ocupa quando a mola se encontra em **equilíbrio**.*

*Designando por $p(t)$ e por p_e as abcissas dos pontos P e P_e respetivamente, por $x(t)$ a diferença $p(t) - p_e$ e por $k > 0$ a constante de proporcionalidade entre a intensidade da força exercida pela mola e a distância $d(P, P_e)$, a **intensidade** algébrica da força exercida sobre P no instante t é dada por $\boldsymbol{F(t) = -kx(t)}$. Tem-se assim:*

$$mx''(t) = m(p(t) - p_e)'' = mp''(t) = F(t) = -kx(t).$$

*O deslocamento $x(t)$ satisfaz portanto a **equação diferencial** $x''(t) = -\alpha x(t)$, onde*

$\alpha = \frac{k}{m} > 0.$

É imediato verificar que as funções da forma $x(t) = a\cos(\sqrt{\alpha}t + b)$, onde a e b são constantes reais, são ***soluções*** *desta equação diferencial. Prova-se também que* ***todas as soluções*** *são desta forma, pelo que esta classe de funções descreve completamente os possíveis movimentos de um ponto material nas condições acima descritas, ou seja, apresentou-se assim um* ***modelo matemático****, fundamentado em* ***leis da Física****, que descreve o movimento oscilatório do ponto P.*

(Notas da ação sobre Metas Curriculares de Matemática A)

Exemplo de atividade prática (proposta na ação sobre Metas Curriculares de Matemática A, da DGE):

2. Uma mola está suspensa por uma extremidade, tendo na outra extremidade um corpo C. Após ter sido alongada na vertical, a mola inicia um movimento oscilatório no instante $t = 0$. A distância ao solo do corpo C (em metros) é dada em cada instante t (em segundos) pela expressão: $D(t) = 3 + 2\cos(\pi t + \pi)$ para $t \in [0,4[$.
   2.1 Determine a distância máxima e mínima do corpo C ao solo.
   2.2 Indique o valor da amplitude do movimento de C.
   2.3 Determine o período e a frequência deste oscilador.
   2.4 Esboce o gráfico da função D e determine a respetiva fase.
   2.5 Determine os instantes em que o corpo C está à distância de 4 metros do solo.

Resolução:

2.1 Distância mínima: D(0)= D(2)=1 $(\pi t + \pi = \pi \vee \pi t + \pi = 3\pi)$ TRI11-7.6

Distância máxima: D(1)= D(3)=5 $(\pi t + \pi = 2\pi \vee \pi t + \pi = 4\pi)$

Pelo modelo $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ vem que:

2.2 a amplitude é 2(=A),

2.3 o período é 2, pois $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ e a frequência vem $\frac{1}{2}$ $(\frac{1}{T})$

2.4 a fase é π (φ)

2.5 $D(T) = 4 \Leftrightarrow 3 + 2\cos(\pi t + \pi) = 4 \Leftrightarrow t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \vee t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Pelo que $t = \frac{4}{3} \vee t = \frac{10}{3}$ TRI11-8.2

Comentário:

A resolução de problemas envolvendo derivadas de funções trigonométricas e osciladores harmónicos (Meta 4 de TRI 12) é um assunto que pode ser trabalhado em equipa, pelos docentes de Matemática A e de Física e Química A.

A articulação com o Ensino Superior, ao nível de formações complementares de curta duração por exemplo, também me parece, neste âmbito, muito importante.

No domínio Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas começa-se pelo estudo do cálculo de juros compostos, com o intuito de introduzir o número de Neper. Estudam-se em seguida, de forma sistemática, as propriedades da função $f(x) = a^x$ *definida no conjunto dos números racionais (onde* $a > 0$*), argumentando-se, com determinadas passagens ao limite, e admitindo alguns resultados intuitivos, mas de demonstração mais delicada, que esta função se pode estender ao conjunto dos números reais mantendo, no essencial, as mesmas propriedades algébricas. Propõe-se depois o cálculo da derivada da função exponencial, partindo do limite* $\lim\limits_{x \to o} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ *, que é admitido, embora se abordem algumas propriedades de aproximação sequencial da exponencial que podem ser utilizadas na respetiva justificação. As funções logarítmicas são introduzidas como funções inversas das funções exponenciais, tomadas como bijeções sobre os respetivos contradomínios, já que se demonstra tratar-se de funções injetivas. Esta abordagem permite estabelecer facilmente, a partir das propriedades conhecidas das funções exponenciais, as propriedades algébricas e analíticas das funções logarítmicas. Aborda-se ainda o cálculo de alguns limites que comparam o crescimento das funções polinomiais, exponenciais e logarítmicas e que os alunos devem conhecer.*

De forma análoga ao caso dos osciladores harmónicos, também o estudo de certas equações diferenciais lineares de primeira ordem permite justificar a utilização de funções exponenciais na modelação de inúmeros fenómenos, como a evolução de algumas populações, da temperatura de determinados sistemas ou o decaimento de uma substância radioativa.

(Programa e Metas Curriculares de Matemática A, pág.22)

4.5. Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas (FEL 12) – 40 aulas

- Juros compostos e Número de Neper
- Funções exponenciais
- Funções logarítmicas
- Limites notáveis envolvendo funções exponenciais e logarítmicas
- Modelos exponenciais

Antes

A análise dos juros compostos já era feita no 11.º ano a propósito do estudo dos de sucessões. Chegava-se ao valor aproximado do limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ de forma intuitiva e com a utilização da calculadora. Apresentava-se, de seguida, o número de Neper.

Agora

A análise do problema dos juros compostos é usada para motivar a determinação do limite da sucessão $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ – primeira definição do número de Neper. No entanto agora, dado o momento em que aparece no currículo, deve ser apresentada uma demonstração mais rigorosa (descritor FEL12-1.4).

- Provar que (u_n) é monótona crescente:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{n} \times \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{n+1}{n} \times \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{n} \times \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \qquad \text{(I)}$$

Relembrando a «desigualdade de Bernoullli»,

$$(1-x)^n \geq 1-nx, \forall x \in [0,1] \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

que já pode ter sido demonstrada por indução no 11ºano (como é sugerido no Caderno de Apoio a propósito do descritor SUC11-3.3), mas que também pode ser justificada pensando que,

$(1-x)^0 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \cdots + (1-x)^{n-1}$ é a soma de n termos de uma progressão geométrica de razão $(1-x)$, ou seja,

$$= 1 \times \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} = \frac{1-(1-x)^n}{x} \leq 1+1+1+1+\cdots+1 = n \Leftrightarrow 1-(1-x)^n$$
$$\leq nx \Leftrightarrow (1-x)^n \geq 1-nx$$

Aplicando a (I) esta desigualdade, fazendo $x = \frac{1}{n^2}$, vem

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n+1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \geq \frac{n+1}{n} \times \left(1 - (n-1) \times \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n} \times \left(1 - \frac{n-1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{n} - \frac{n^2-1}{n^3} = \frac{n^3 + n^2 - n^2 + 1}{n^3} = 1 + \frac{1}{n^3} > 1$$

Assim

$u_n > u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$

e portanto a sucessão é estritamente crescente.

- Provar que (u_n) é majorada:

Aplicando o binómio de Newton, tem-se

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + {}^nC_1 \times \frac{1}{n} + {}^nC_2 \times \frac{1}{n^2} + {}^nC_3 \times \frac{1}{n^3} + \dots + {}^nC_n \times \frac{1}{n^n}$$

Ora para $2 \leq p \leq n$,

$${}^nC_p \times \frac{1}{n^p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!\,n^p} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p! \times n \times n \times \dots \times n}$$

$$= \frac{1}{p!} \times \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \frac{n-p+1}{n}$$

$$= \frac{1}{p!} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \leq \frac{1}{p!}$$

Assim,

$$u_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{p!}$$

Mas,

$$p! \geq 2^{p-1} \Rightarrow \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{2^{p-1}}$$

ou seja

$$u_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3$$

e portanto a sucessão é majorada.

Como a sucessão é estritamente crescente e majorada, é convergente e tem-se

$$u_1 = 2 < \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Podem obter-se melhores aproximações do valor do limite e sabe-se que é um número irracional. Chama-se número de Neper e designa-se por $e = 2{,}71828 \ldots$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

Podemos interpretar o limite, em $+\infty$, desta quantidade, como o capital final obtido distribuindo o juro de 100% de forma uniforme durante o ano e capitalizando-o "a cada instante". Neste caso, o capital final não será infinito, mas antes igual a $e \approx 2{,}72$.

De um ponto de vista dos juros compostos, u_n representa o montante disponível ao fim de um ano, dividindo esse ano em n períodos iguais e capitalizando-se um juro de $\frac{100\%}{n}$ no final de cada um deles, relativamente a um capital inicial de $C_0 = 1$ e a uma taxa anual de juros de 100%.

(Caderno de Apoio, pág.44)

Em seguida estuda-se a função definida nos racionais por $f(x) = a^x, a > 0$, e faz-se a sua extensão (de forma intuitiva) aos números reais, de modo análogo ao que já era feito no anterior Programa.

Os alunos devem ficar a saber,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

o limite notável

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

e a derivada da função exponencial.

Definem-se depois as funções logarítmicas, estabelecem-se as respetivas propriedades e as regras de derivação, como era habitual.

Apresenta-se a justificação dos limites notáveis:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^k} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x} = 0}$$

Resolvem-se problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, as respetivas propriedades algébricas e limites notáveis.

No final deste domínio aparece, como **novidade no Ensino Secundário**, a resolução de algumas equações diferenciais de primeira ordem. Resolvem-se problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

É o que está contemplado na **Meta FEL12-5**:

Modelos exponenciais

5. Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial

1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

Nota:[24]

- **Decaimento radioativo (ou desintegração radioativa)**

Consideremos o problema que consiste em determinar a evolução ao longo do tempo da massa de determinada substância radioativa.

[24] O texto que se segue resulta de notas ou documentos provenientes da Ação de Formação sobre Metas Curriculares de Matemática A, promovida pela DGE na Escola Secundária Padre António Vieira em novembro de 2014.

Prova-se que a massa m de uma dada partícula verifica:

$$m'(t) = -km(t)$$

Tem-se assim que existe uma constante real C tal que:

$$m(t) = Ce^{-kt}$$

Note-se ainda que ao conhecer o valor m_0 da massa em certo instante t_0, então tem-se que:

$$m_0 = m(t_0) = Ce^{-kt_0} \Longrightarrow C = m_0 e^{kt_0}.$$

Existe uma e somente uma solução da equação considerada que, num dado intervalo de tempo (que neste caso pode ser, por exemplo, $[t_0, +\infty[$ ou mesmo $\mathbb{R}$), é dada por :

$$m(t) = m_0 e^{kt_0} e^{-kt} = m_0 e^{-k(t-t_0)}$$

Em particular, o tempo $t_1 - t_0$ que a massa leva a **reduzir-se a metade**, designado por «**half-life**» («**semivida**»), não depende da massa inicial e é uma quantidade característica da substância radioactiva em questão. Se designarmos a semivida por t_h teremos então:

$$t_h = \frac{\ln 2}{k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{t_h}$$

e obtemos também, em função da semivida:

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t-t_0}{t_h}}.$$

É nesta fórmula que se baseia o processo de **datação** de objectos dito "pelo **Carbono 14**"; com efeito, podemos resolver esta equação em ordem a $t - t_0$, para t igual determinado instante t_1, designando $m(t_1)$ por m_1 (ou partir directamente da fórmula atrás obtida para k em função de t_0, t_1, m_0 e m_1 e substituir k por $\frac{\ln 2}{t_h}$):

- **Crescimento Populacional**

Pensemos na **evolução de determinada população**, por exemplo de seres humanos nacionais de determinado país. Designando por $P(t)$ o **número de indivíduos** existentes em dado **instante t**, pretendemos estudar a evolução da função $P(t)$, procurando fazer hipóteses tão realistas quanto possível acerca da população de modo a podermos supor que $P(t)$ é **solução de determinada equação diferencial**. Tal como para o caso da desintegração radioativa, também é claro agora que a população só aproximadamente se pode considerar como função diferenciável do tempo, ou mesmo contínua, uma vez que só pode tomar valores inteiros.

Neste caso, porém, considerando populações constituídas por "grande número" de indivíduos, relativamente à variação que nessas populações ocorre em "pequenos" intervalos de tempo, podemos conjecturar que a **aproximação por funções diferenciáveis** será adequada, pelo menos em certos casos.

Comecemos por supor que a variação de P ao longo do tempo é apenas consequência das **mortes** e **nascimentos** que vão ocorrendo (ou seja supõe-se que a emigração e imigração se compensam); em primeira aproximação é razoável supor que o número de mortes que ocorre por unidade de tempo é **proporcional à população** total existente, com certa constante de proporcionalidade $M > 0$ (M diz-se **taxa de mortalidade** média por habitante), bem como o número de nascimentos, com certa constante de proporcionalidade $N > 0$ (**taxa de natalidade** média por habitante).

Teremos então o seguinte cálculo aproximado para a população no instante $t + \Delta t$, dada a população no instante t:

$$P(t + \Delta t) = P(t) + N\Delta t P(t) - M\Delta t P(t) \Longrightarrow \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (N - M)P(t)$$

Com a hipótese de diferenciabilidade, teremos em cada instante t, por passagem ao limite quando $\Delta t \longrightarrow 0$:

$$P'(t) = (N - M)P(t)$$

As soluções podem ser todas expressas na forma:

$$P(t) = P_0 e^{(N-M)(t-t_0)},$$

onde P_0 é a população no instante t_0.
Muitas vezes designa-se $N - M$ por «taxa de crescimento médio por habitante».

Assim, se a **taxa de natalidade** (média por habitante) for **superior** à **taxa de mortalidade**, a população terá **crescimento exponencial**, ao passo que no caso $N < M$ a população tenderá exponencialmente para a **extinção**.

Este modelo, dito "**Malthusiano**", em homenagem a Malthus, eclesiástico inglês que, na viragem do século XVIII para o século XIX, apresentou este modelo, fazendo, a partir dele, previsões catastróficas para o futuro da Humanidade, tem, evidentemente, fortes limitações, pois não leva em conta a limitação dos recursos, a imigração e emigração, as variações das taxas de natalidade e mortalidade, os conflitos, etc.

Tal como no caso do decaimento radioactivo, também agora, podemos dispensar o conhecimento prévio da constante $N - M$, desde que se tenha acesso a censos da população em dois instantes diferentes; assim, refazendo os cálculos acima efectuados no caso do decaimento obtemos, para valores P_0 e P_1 da população em instantes respectivamente t_0 e t_1:

$$N - M = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{P_1}{P_0} = \frac{\ln P_1 - \ln P_0}{t_1 - t_0}$$

[25]

e portanto:

$$P(t) = P_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}} = P_0 e^{\frac{\ln P_1 - \ln P_0}{t_1 - t_0}(t-t_0)}$$

Para uma análise de outros modelos de crescimento populacional (nomeadamente o logístico) *cf.* o texto de apoio ao descritor FEL12-6.4.

[25] Thomas Malthus (1766-1834) influenciou Darwin com os seus trabalhos relativos ao crescimento das populações. Malthus defendia que a população humana tende a crescer de forma geométrica, enquanto os recursos alimentares são produzidos segundo uma progressão aritmética.

- **Lei de Newton do arrefecimento/aquecimento**

Esta lei estabelece que a taxa de variação instantânea da **temperatura** de um corpo é diretamente proporcional à **diferença** entre a temperatura ambiente e a temperatura do corpo.

Representando por $T(t)$ a **temperatura do corpo** no instante t e por T_a a **temperatura ambiente**, suposta **constante**, teremos então, para certa constante $k > 0$:

$$T'(t) = k\left(T_a - T(t)\right);$$

Embora esta equação não seja exactamente da mesma forma das anteriores, se definirmos $f(t) = T_a - T(t)$ teremos:

$$f'(t) = -T'(t) = -k\left(T_a - T(t)\right) = -kf(t).$$

Teremos então:

$$T_a - T(t) = (T_a - T_0)e^{-k(t-t_0)},$$

sendo T_0 a temperatura do corpo no instante t_0.

Portanto:

$$T(t) = T_a - (T_a - T_0)e^{-k(t-t_0)} = T_0e^{-k(t-t_0)} + T_a\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right),$$

ou seja, a temperatura em cada instante é uma **média pesada** entre a temperatura inicial do corpo e a temperatura ambiente, de modo que o "**peso**" associado à temperatura **do corpo tende para zero exponencialmente** e o "peso" associado à temperatura **ambiente tende para 1 também exponencialmente**. Tal como nos modelos anteriores, também se poderia determinar o valor de k conhecendo o valor T_0 e T_1 da temperatura em instantes, respectivamente t_0 e t_1:

$$k = -\frac{1}{t_1 - t_0}\ln\frac{T_a - T_1}{T_a - T_0}.$$

Apresentam-se seguidamente dois exemplos de atividades práticas sugeridas no Caderno de Apoio:

FEL12 – 6.4. (c.a. página 66)

***Um copo com água acabada de ferver (portanto à temperatura de 100ºC) é deixado arrefecer numa sala à temperatura ambiente de 25ºC. Sabendo-se que ao fim de dois minutos a temperatura da água atinge 80ºC, ao fim de quanto tempo atingirá a temperatura de 50ºC?**

Sugestão:

a *lei de Newton do arrefecimento/aquecimento* estabelece que

a taxa de variação instantânea da temperatura de um corpo é diretamente proporcional à diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura do corpo. Representando por $T(t)$ a temperatura do corpo no instante t e por T_a a temperatura ambiente, suposta constante, teremos então, para certa constante $k > 0$:

$$T'(t) = k(T_a - T(t)) \quad \text{ou} \quad T(t) = ce^{-kt} + T_a$$

<u>Sugestão de resolução:</u>

$T'(t) = k(T_a - T(t)) \Longrightarrow \ T(t) = ce^{-kt} + T_a$

$T_a = 25 \ \Longrightarrow T(t) = ce^{-kt} + 25,$

$100 = ce^{-k.0} + 25 \ \Leftrightarrow c = 75 \quad \Longrightarrow T(t) = 75e^{-kt} + 25$

$80 = 75e^{-2k} + 25 \ \Leftrightarrow k = \frac{ln\frac{11}{15}}{-2} \ \approx 0{,}155$

Logo: $\boldsymbol{T(t) = 75e^{-0{,}155t} + 25}$

$50 = 75e^{-0{,}155t} + 25 \ \Leftrightarrow \ e^{-0{,}155t} = \frac{25}{75} \ \Leftrightarrow t = \frac{ln\frac{1}{3}}{-0{,}155} \ \Leftrightarrow t \approx 7{,}08$

R.: A água atinge os 50℃ ao fim de aproximadamente 7 minutos.

FEL12 – 6.4. (c.a. página 65)

Uma massa de $m_0 = 50$ gramas de Rádio 226 existente numa amostra no instante $t_0 = 0$ desintegra-se ao longo do tempo. Em todo o instante t, a taxa de variação instantânea da massa, $m'(t)$, é proporcional à massa $m(t)$ existente nesse instante. Sabendo que ao fim de 1 ano, a massa de Rádio é igual a $m(1) = 49{,}975$ gramas, calcule o tempo necessário à desintegração de metade da massa inicial. Apresente o resultado em anos, arredondado a unidade.

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)},$$

onde m_0 é a massa da substância radioativa em determinado instante t_0

<u>Sugestão de resolução:</u>

Na equação $m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)}$ $\quad m_0 = 50$, pelo que $m(t) = 50e^{-k}$

$$49{,}975 = 50e^{-1k} \implies e^{-k} = 0{,}9995 \implies k = -ln0{,}9995$$

$$\boldsymbol{m(t) = 50e^{ln0{,}9995t}}$$

$$25 = 50e^{ln\,0{,}9995t} \implies t = \frac{ln0{,}5}{ln0{,}9995} \approx 1385.95$$

(Descritores FEL12-5.1,6.4)

R.: Para que metade desta massa de Radio 226 se desintegre são necessários aproximadamente 1386 anos.

Comentário:

Embora apenas se pretenda que os alunos tenham conhecimento de que os fenómenos referidos no descritor FEL12-5.1 podem ser modelados através de uma equação diferencial da forma aí indicada, esse conhecimento implica uma **descrição** adequada desses fenómenos. Além disso é conveniente, tanto quanto possível, com base nessa descrição, **motivar** o referido modelo.

Assim, a abordagem e o tratamento adequados dos modelos exponenciais previstos exige, sem dúvida, que os docentes adquiram formação ajustada à sua lecionação. É um trabalho que, para resultar, deve ser planificado a médio ou longo prazo, pelos responsáveis da gestão do currículo.

Considera-se relevante que os alunos terminem o Ensino Secundário com algumas noções, ainda que não inteiramente formalizadas, de Cálculo Integral, já que, em certo sentido, se trata de um complemento essencial do Cálculo Diferencial. Poderão dessa forma construir uma visão mais unificada e abrangente da Análise elementar. É nesse espírito que foi concebido o domínio Primitivas e Cálculo Integral. Após a introdução da definição de primitiva de uma função e do estudo de algumas das respetivas propriedades imediatas, é abordada a noção de integral de uma função contínua e não negativa num intervalo limitado, de forma intuitiva e visual, recorrendo à noção de área e, utilizando-se propriedades elementares admitidas para esta noção, demonstra-se o Teorema fundamental do cálculo e a fórmula de Barrow. A definição é posteriormente estendida às funções contínuas que alternam de sinal um número finito de vezes, bem como os referidos resultados fundamentais. Neste domínio são, de modo geral, estudadas as principais propriedades dos integrais definidos e analisadas algumas técnicas de primitivação e de integração.

(Programa e Metas Curriculares de Matemática A, pág.22)

4.6. Primitivas e Cálculo Integral (PCI 12) – 20 aulas

- Primitivas
- Cálculo Integral
- Resolução de problemas

Este é um domínio completamente novo no Programa de Matemática A do Ensino Secundário. A inclusão destes temas é justificada pela necessidade de alinhar as opções curriculares nacionais com outros países, nomeadamente aqueles que participam no *TIMSS Advanced*[26], programa no qual Portugal participa desde 2015.

Define-se primitiva e família de primitivas de uma função num intervalo.

Os alunos devem aprender e memorizar as regras para primitivar as "funções de referência":

$f(x) = 1, f(x) = x^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1\}), f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = e^{x}, f(x) = senx$ e $f(x) = cosx$

[26] Referido na Introdução

Também devem aprender a calcular primitivas de expressões do tipo $u'(x).f(u(x))$ quando é conhecida uma primitiva de f.

Atividades práticas

(sugeridas na ação de formação promovida pela Direção Geral da Educação – DGE, em novembro de 2014)

PCI12 – 1.7. (c.a. pág. 67)

1. Calcule, em intervalos convenientes, as seguintes primitivas:

1.2 $\int \sin x \, dx$

1.7 $\int \frac{x}{x^2+1} \, dx$

1.9 $\int x^3(x^4+1)^8 \, dx$

1.13 * $\int cos^3 x \, dx$

1.2)

$$\int senx \, dx = -cosx + c$$

1.7)

$$\int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} ln(x^2+1) + c$$

1.9)

$$\int x^3(x^4+1)^8 \, dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 \times (x^4+1)^8 \, dx = \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} \times (x^4+1)^9 + c$$

$$= \frac{1}{36}(x^4+1)^9 + c$$

1.13)

$$\int cos^3 x \, dx = \int cosx \times cos^2 x \; dx = \int cosx \times (1 - sen^2 x) \; dx$$

$$= \int cosx \, dx - \int cosx . sen^2 x \, dx = senx - \frac{1}{3} sen^3 x + c$$

Os alunos podem consolidar o que aprenderam sobre derivadas verificando sempre os resultados, uma vez que $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$

Sobre a noção de integral definido, os alunos devem:

1. **Identificar, dado um referencial cartesiano e uma função f contínua e não negativa num intervalo $[a, b]$ $(a \leq b)$, o «integral de f entre a e b» ($\int_a^b f(x)dx$) como a medida, na unidade quadrada associada à unidade de comprimento desse referencial, da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f.**
2. **Conhecer a origem histórica da expressão «$\int_a^b f(x)dx$», representando o símbolo « $\int$ » uma "soma" e «$f(x)dx$» a medida da área de um "retângulo" com lados de medida $f(x)$ e "dx", sendo esta última "infinitesimal".**

(descritores PCI12- 2.1 e 2.2)

reconhecer:

o «Teorema fundamental do cálculo integral»:
dada uma função contínua e não negativa num intervalo $I = [a, b]$, a função F definida em I por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é uma primitiva de f no intervalo I.

Deste resultado deduz-se a «Fórmula de Barrow»: se F é uma primitiva de f no intervalo $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

em que se convenciona que, para $a < b$,

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

Também devem ficar a saber a «Regra de Chasles»:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt\,, \forall a, b, c \in [a, b]$$

e a «Propriedade da linearidade do integral definido»:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Determinar o integral de uma função que muda de sinal um número **finito** de vezes:

1. Para uma função f contínua e não positiva em $[a,b]$, define-se o integral de f em $[a,b]$ por

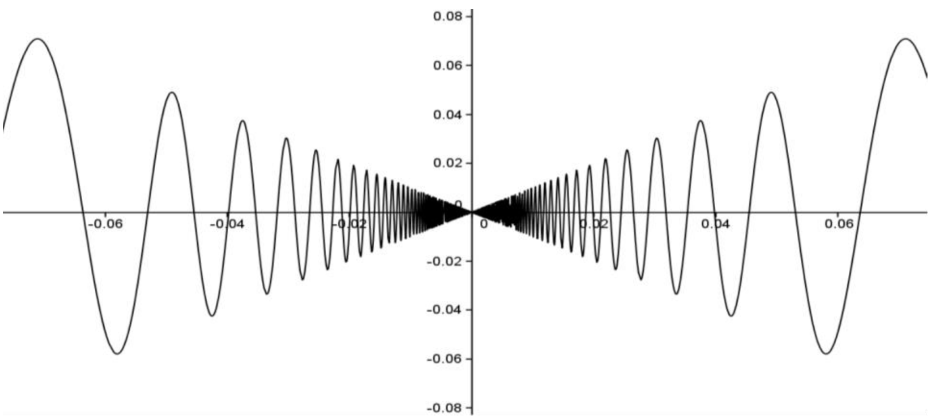
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx\,.$$

Como a área de uma região do plano é invariante por reflexão axial, este integral também pode ser interpretado como sendo o simétrico da área da região do plano delimitada pelas retas de equações $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pela curva de equação $y = f(x)$.

2. Se existir uma subdivisão $\left(a = c_0, c_1, c_k\,,\ \ldots.,\ b = c_n\right)$ de $[a,b]$ tal que f é não negativa ou não positiva em cada um dos intervalos definidos pela subdivisão, define-se o integral de f em $[a,b]$ por

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \cdots + \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{b} f(x)dx$$

Deve-se chamar a atenção que existem funções contínuas (como a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$) que não pertencem a esta classe, e para as quais, consequentemente, não se definiu a noção de integral.



Algumas atividades (sugeridas na ação de formação promovida pela DGE, em novembro de 2014):

- Determine a área da região do plano compreendida entre o eixo das abcissas, o gráfico de $y = x^2$ e as retas $x = 1$ e $x = 5$.

$$\int_1^5 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{124}{3}$$

- Determine a área da região do plano delimitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 3$.

$$x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\, dx = \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}^3}{3} + 3\sqrt{3} + \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{3} = 4\sqrt{3}$$

- Indique a derivada de $f(x) = \int_0^x e^{5t} dt$.

$$f'(x) = \left(\int_0^x e^{5t} dt\right)' = e^{5x}$$

- Mostre que a função definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ é ímpar.

$D_F = \mathbb{R}$. Seja $x \in \mathbb{R}$, logo $-x \in \mathbb{R}$, mostremos que $F(-x) = -F(x)$

$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = -\int_{-x}^0 e^{-t^2} dt \underset{e^{-t^2}\text{é } par}{\overset{.}{=}} -\int_0^x e^{-t^2} dt = -F(x)$$

- Determine A e B tais que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ e utilize a igualdade para calcular o valor de $\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\, dx$.

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow 1 = Ax + A + Bx \Leftrightarrow A = 1 \wedge B = -1$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}\, d = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = [\ln x - \ln(x+1)]_1^3 = ln3 - ln4 - ln1 + ln$$
$$= ln\frac{3}{2}$$

- Indique três pontos do plano, A, B e C, de modo que as abcissas e as ordenadas sejam todas diferentes. Recorrendo à noção de integral, determine a área do triângulo de vértices A, B e C.

Considere-se, por exemplo, *A*(-1, 2), *B*(3, 5) e *C*(4, 7).

A reta *AB* é dada por: $y - 2 = \frac{3}{4}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$

A reta *BC* é dada por: $y - 5 = 2(x-3) \Leftrightarrow y = 2x - 1$

A reta *AC* é dada por: $y - 2 = 1(x+1) \Leftrightarrow y = x + 3$

A área do triângulo de vértices *A*, *B* e *C* é dada por:

$$\int_{-1}^{3} \left[(x+3) - \left(\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}\right)\right] dx + \int_3^4 [(x+3) - (2x-1)]dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) dx + \int_3^4 (-x+4)dx = \left[\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_{-1}^{3} + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_3^4 =$$

$$= \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) + \left(-8 + 16 + \frac{9}{2} - 12\right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

1. Calcule a medida da área da região do plano formada pelos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \wedge 0 \leq y \leq 4x + \tan x$.

(Caderno de Apoio, página 73)

A função, y, não toma valores negativos no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4x + tgx)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} tgx\, dx$$

$$= 4 \times \frac{x^2}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{senx}{cosx}\, dx$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-senx}{cosx}\, dx$$

$$= 2 \times \frac{\pi^2}{9} - \ln|cosx|]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2}{9}\pi^2 - \left[ln\left(cos\frac{\pi}{3}\right) - ln(cos0)\right]$$

$$= \frac{2}{9}\pi^2 - \left[ln\left(\frac{1}{2}\right) - ln(1)\right]$$

$$= \frac{2}{9}\pi^2 + ln2 + 0$$

Descritores: FEL 12 -3.7

PCI 12 – 1.6-2.1-2.6-2.9-3.3

O Programa prevê ainda a resolução de problemas envolvendo funções posição, velocidade e aceleração e a primitivação e integração de funções.

O Caderno de Apoio, na página 73, apresenta os exemplos seguintes:

2. Um ponto material P desloca-se na reta numérica, estando, em cada instante $t \geq 0$, sendo o tempo medido em segundos, submetido à aceleração $a(t)$ igual a 4 unidades de comprimento por segundo quadrado. Calcule a posição que ocupa o ponto P no instante $t = 10$, sabendo que P se encontra no instante $t = 0$ na origem e que a velocidade de v é, no instante $t = 5$, de 10 unidades de comprimento por segundo, no sentido positivo.

3. Um ponto material P desloca-se na reta numérica, estando em cada instante $t \geq 0$ submetido à aceleração $a(t) = \cos(5t)$, na unidade de aceleração correspondente.
   3.1 *Mostre que se a velocidade inicial (ou seja, no instante $t = 0$) de P for não nula, P atinge pontos arbitrariamente afastados da respetiva posição inicial.
   3.2 Esta propriedade mantém-se quando a velocidade inicial de P é nula?
   3.3 Calcule a velocidade e a posição inicial de P sabendo que nos instantes $t = \frac{5\pi}{2}$ e $t = 5\pi$ o ponto P se encontra na origem do referencial.

4. *Um ponto material P desloca-se na reta numérica, estando em cada instante $t \geq 0$ submetido à aceleração $a(t) = \cos(\omega t + \varphi)$, onde $\omega > 0$ e $\varphi \in \mathbb{R}$. Calcule para que velocidade(s) inicial(ais) (ou seja, no instante $t = 0$) a trajetória de P é limitada, isto é, todas as posições de P ao longo do tempo pertencem a um dado intervalo limitado. Calcule, nesse caso, a amplitude da trajetória de P, isto é, a maior distância entre dois pontos dessa trajetória.

Comentário:

Para que os alunos neste domínio consigam uma taxa de sucesso razoável, é necessário muito trabalho dos docentes, principalmente por parte daqueles que deixaram de ter contacto há vários anos com o Ensino Superior. Só com alguma formação específica ou trabalho colaborativo em equipa, podem ter o trabalho facilitado.

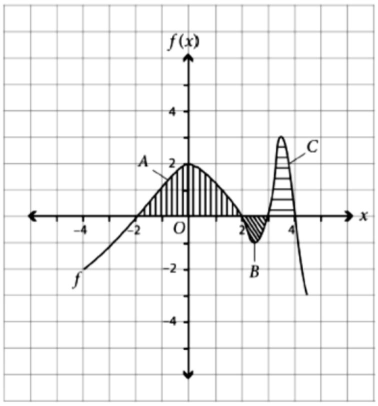
Também os alunos terão de exercitar bastante e isso não parece estar previsto nas 20 aulas que o Programa estipula.

Embora o Programa não contemple explicitamente a regra da primitivação por partes, ela aparece no Caderno de Apoio (pág.73):

1. Sejam u e v funções definidas e primitiváveis num intervalo I.
   1.1*Derivando o produto $u.v$, mostre que sendo $P(uv')$ uma primitiva de uv' então $uv - P(uv')$ é uma primitiva de $u'.v$.
   1.2 Deduza da alínea anterior que:
   $$\int \left(u'(x)v(x)\right)\,dx = uv - \int \left(u(x)v'(x)\right)\,dx$$
   1.3 Utilizando o resultado da alínea anterior determine a primitiva das seguintes funções começando por escrevê-las adequadamente na forma $u'v$:
   1.3.1 xe^x 1.3.2 ** $\ln x$ 1.3.3 $x \sin x$

Um dos itens disponibilizados pela organização do *TIMSS Advanced* (em anexo) que pode, de algum modo, justificar a introdução deste domínio:

TIMSS Advanced 2015



For the areas between the graph of $f(x)$ and the x-axis shown above, area $A = 4.8$ units, area $B = 0.8$ units, and area $C = 2$ units.

What is the value of the definite integral $\int_{-2}^{4} f(x)dx$?

- Ⓐ 5.6
- ● 6.0
- Ⓒ 6.8
- Ⓓ 7.6

Finalmente, no domínio Números Complexos, apresenta-se a motivação histórica para a introdução dos números imaginários, relacionada com a fórmula de Cardano para a resolução de equações do terceiro grau. Introduz-se em seguida o corpo dos números complexos, tendo-se optado por efetuar uma construção algébrica que consiste em munir o conjunto $\mathbb{R}^2$ *da operação de adição usual e de uma multiplicação adequada. Começa-se por motivar estas definições, estabelecendo-se previamente determinadas propriedades que resultam necessariamente das características que se pretende atribuir aos números complexos, em particular a existência de um número cujo quadrado é igual a* -1*. Trata-se de uma construção concreta que pretende evitar algumas das reticências evidenciadas geralmente pelos alunos quanto à "verdadeira existência" dos números imaginários e que está estreitamente relacionada com o habitual conceito de "plano complexo". Após a análise das propriedades operatórias dos números complexos, é estudado em pormenor o grupo multiplicativo dos complexos de módulo 1, estabelecendo- -se assim uma base sólida para a representação dos números complexos na forma trigonométrica e, posteriormente, para a radiciação complexa. É ainda estudada a representação complexa de algumas transformações do plano, como rotações, reflexões, translações e homotetias, e aproveitam-se as fórmulas de De Moivre para linearizar polinómios trigonométricos, o que permite estabelecer rapidamente diversas fórmulas de trigonometria e primitivar algumas funções.*

(Programa e Metas Curriculares de Matemática A, pág.22)

4.7.Números Complexos (NC 12) – 26 aulas

- Introdução aos números complexos
- Complexo conjugado e módulo dos números complexos
- Quociente de números complexos
- Exponencial complexa e forma trigonométrica dos números complexos
- Raízes n-ésimas de números complexos
- Resolução de problemas

Antes

A introdução dos números complexos era feita com uma pequena abordagem histórica como estava previsto, mas nem sempre se fazia alusão ao episódio que suscitou o aparecimento deste tipo de números.

Agora

Considera-se que é importante que os alunos saibam que foi a resolução de equações do 3.º grau que conduziu ao aparecimento dos números complexos. Os alunos devem ser sensibilizados para a constatação que o progresso da Matemática, ao longo dos séculos, surgiu "por acaso" motivado pelo muito trabalho realizado na procura de soluções de problemas e/ou de equações.

Introdução aos números complexos

1. *Conhecer o contexto histórico do aparecimento dos números complexos e motivar a respetiva construção*

    1. Saber que, em meados do século XVI, Girolamo Cardano apresentou uma fórmula, dita «fórmula resolvente para equações do terceiro grau», que permite obter uma solução real de equações do terceiro grau da forma $x^3 + px + q = 0$ em função dos números reais p e q.
    2. Saber que ao substituir formalmente p e q por certos valores na fórmula de Cardano esta passa a apresentar o símbolo «$\sqrt{-1}$» e que, operando formalmente com este símbolo, considerando em particular que «$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$», se obtém efetivamente uma solução real da equação $x^3 + px + q = 0$, e que este facto está na origem da motivação para se definir adequadamente um "número" cujo quadrado é igual a -1.

(Metas Curriculares de Matemática A, pág.58)

Se na equação do terceiro grau $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, se aplicar a mudança de variável $y = x - \frac{a}{3}$, obtém-se

$$x^3 + 0x^2 + \left(b - \frac{1}{3}a^2\right)x + \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c = 0$$

ou seja, uma equação do tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

com

$$\begin{cases} p = b - \frac{1}{3}a^2 \\ q = \frac{a}{3}\left(\frac{2}{9}a^2 - b\right) + c \end{cases}$$

Se $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geq 0$ então uma das soluções é dada pela «fórmula resolvente para equações do terceiro grau»:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Conhecida uma das soluções, pode decompor-se o polinómio em fatores e determinar assim todas as soluções.

O matemático Rafael Bombelli (1526-1572) aplicou a fórmula de Cardano à equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Atendendo à semelhança entre os radicandos, consegue chegar à conclusão que

$2 + \sqrt{-121} = 2 + 11\sqrt{-1}$ e que $2 - \sqrt{-121} = 2 - 11\sqrt{-1}$

e que

$2 + 11\sqrt{-1} = \left(2 + \sqrt{-1}\right)^3$ e que $2 - 11\sqrt{-1} = \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3$

e encontra uma das soluções

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$$

Destes cálculos, surge a necessidade de se construir um conjunto de números que englobe o $\mathbb{R}$ e que contenha um elemento[27] « i » tal que $i \times i = -1$.

Assim, deve ficar claro para os alunos que o aparecimento dos números complexos[28] surgiu na resolução de equações do 3.º grau e não do 2.º grau (para estas, já era assumido há muitos séculos a impossibilidade da sua resolução analítica se o binómio discriminante fosse negativo) e que passou pela tentativa de resolver inúmeras equações.

A determinação de raízes de polinómios tem sido um facto a acelerar o progresso da Matemática.

Propõe-se então, a construção de um modelo matemático: um conjunto de números que contenha os números reais e uns outros no qual seja possível encontrar as soluções de equações que conduzem a expressões do tipo $x^{2n} = k, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}^-$. Esse conjunto vai ser designado por $\mathbb{C}$.

O corpo $\mathbb{C}$ é construído a partir de $\mathbb{R}^2$ onde são definidas duas operações:
«+» como $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ e
«×» como $(a,b) \times (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$
que gozam das propriedades comutativa e associativa, em que $(0,0)$ é o elemento neutro de «+», $(1,0)$ é o elemento neutro de «×» e «×» é distributiva em relação a «+».

A unidade imaginária i é um elemento de $\mathbb{C}$ tal que $i \times i = -1$ e representa-se no plano complexo pelo ponto de coordenadas $(0,1)$.

$\mathbb{C} = \{z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + yi\}$ onde se verificam as operações referidas.

Assim,

$\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$ se associarmos a cada $x \in \mathbb{R}$ o par ordenado $(x,0)$ e verifica-se que o resultado das operações com pares ordenados em que a 2ª coordenada é nula é igual ao resultado de aplicar as operações usuais de $\mathbb{R}$ aos números que constituem as primeiras coordenadas.

[27] É Euler, em 1777, que adota pela primeira vez o símbolo i para designar $\sqrt{-1}$ e escreve $i^2 = -1$
[28] É a Gauss (1777-1855) que se deve a definição de número complexo que ainda hoje se usa

$i^2 = (0,1) \times (0,1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1,0) = -1 + 0i = -1$

O conjunto $\mathbb{C}$ é definido como «corpo dos números complexos».

A partir daqui o Programa de Matemática A de 2014 segue os moldes do Programa anterior.

Representação de números complexos no «plano de Argand», definição de afixo de um número complexo, propriedades algébricas e geométricas do conjugado e do módulo de um número complexo e operações com números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica; interpretação de operações com números complexos usando as isometrias do plano e/ou homotetias do plano.

Exemplos retirados do Caderno de Apoio:

1. Determine a parte real e a parte imaginária dos seguintes números complexos:
   1.1 $-i(3+2i)^2$
   1.2 $(1+3i)^{-1}$
   1.3 $\frac{3+5i}{1+7i}$
   1.4 i^{191}
   1.5 $\left(1-\sqrt{2}i\right)^3$

2. Determine o conjunto dos números complexos z tais que
   2.1 * $\frac{2z-i}{2+iz}$ é um número real;
   2.2 $\frac{z-1-i}{z+1+i}$ é um número imaginário puro.

(Página 77)

1. Para cada uma das seguintes funções, indique se se trata de uma translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante ou homotetia (interpretando-as como transformações do plano complexo) e construa a imagem do afixo $M(x,y)$ de um número complexo genérico $z = x + iy$:
   1.1 $f(z) = z + 1 + i$;
   1.2 $f(z) = iz$;
   1.3 $f(z) = -\bar{z}$;
   1.4 $f(z) = 3z$;
   1.5 $*f(z) = iz + 5$;
   1.6 $**f(z) = i\bar{z}$

2. Construa a imagem do triângulo de vértices $A(1,0)$, $B(0,1)$ e $O(0,0)$ por cada uma das transformações indicadas no exercício anterior.

1. Determine o módulo e um argumento dos seguintes números complexos:
   1.1 $(1-i)^3$
   1.2 $\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$
   1.3 $i\frac{(1-i)^2}{1+i\sqrt{3}}$
   1.4 $*\ \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ $, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
   1.5 $*\ e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{8}}$

2. Apresente na forma algébrica o número complexo $z = \frac{i\left(1+\sqrt{3}i\right)^4}{(-1+i)^9}$.

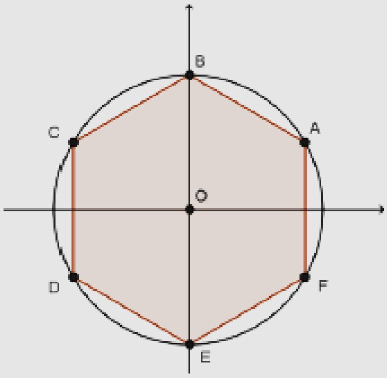
3. Considere o número complexo $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calcule z^2 e deduza uma representação de z na forma trigonométrica.

(Página 78)

5. Represente as regiões do plano definidas pelas seguintes condições:
   5.1 $|z| \leq 2 \wedge |z-i| > 1$;
   5.2 $|z-1-i| = |z+i|$;
   5.3 $-\pi < Arg(z) < \frac{\pi}{2} \wedge |z+1| = 3$;
   5.4 $0 \leq Arg(z-1) < \frac{\pi}{4} \wedge \left|z - \frac{1}{2}\right| < 2$;
   5.5 $|z-1| < |z-i|$.
   5.6 $|z-3-i| \geq |z-i| \wedge \left|z - \frac{1}{2} - i\right| \geq 2$
   5.7 $-\frac{\pi}{3} \leq Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) < \frac{\pi}{3} \vee |z+1-i| \leq 2$

(Página 79)

3. Considere o hexágono regular $[ABCDEF]$ cujo centro é a origem O do referencial ortonormado representado. Sabe-se que o ponto C é o afixo do número complexo $z_1 = -3\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$.
   3.1 Determine as coordenadas dos restantes vértices do hexágono.
   3.2 Indique uma equação cujas soluções sejam os números complexos cujos afixos são os vértices do hexágono.



2. Resolva as equações:
   2.1 $2z^2 - 6z + 29 = 0$.
   2.2 $z^3 + 2z^2 + 5z = 0$
   2.3 $z^4 - 2z^2 - 15 = 0$.
   2.4 $iz^3 - z^2 - 2 = 0$, sabendo que $z_o = i$ é solução.

(Página 80)

Comentário:

Quando se define o conjunto $\mathbb{C}$ como «corpo dos números complexos» é natural que alguns dos alunos mais atentos e interessados questionem o que é um «corpo».

Esta informação complementar para o professor não foi contemplada no Caderno de Apoio.

Os docentes devem prever essa situação quando estiverem a planificar este assunto e prepararem uma breve explicação da definição de corpo enquadrada por uma abordagem simples e resumida do que são estruturas algébricas.

Assim, será apropriado recordar que:

Uma operação θ é fechada para um conjunto A quando $\forall x, y \in A\ \exists^1 z \in A: x\theta y = z$.

O conjunto A é um «grupóide» relativamente à operação θ se e só se θ define uma aplicação de A^2 em A.

(A, θ) é grupóide se e só se θ é fechada para A .

(A, θ) é «semi-grupo» se (A, θ) é um grupoide e θ é associativa.

u é elemento neutro de um grupóide (A,θ) se e só se $\forall x \in A, \exists u \in A: u\,\theta x = x\theta u = x$

Dois elementos são opostos quando operados um com o outro dão o elemento neutro.

Um elemento de um grupóide associativo diz-se «regular» quando tiver oposto.

«Grupo» é um grupóide associativo com elemento neutro, em que todos os elementos são regulares.

Um grupo diz-se «abeliano» ou «grupo comutativo» quando a operação é comutativa.
Um grupo que não seja abeliano é um «grupo simples».

Considerando (A,θ) e (B,T), chama-se «isomorfismo» a toda a aplicação biunívoca entre A e B tal que $\begin{cases} x,y \in A \Rightarrow f(x), f(y) \in B \\ f(x\theta y) = f(x)\mathrm{T}f(y) \end{cases}$

Se f é um isomorfismo, também f^{-1} é um isomorfismo.

$(A,+,.)$ é um «anel» se for um terno ordenado (conjunto associado a duas operações, a que se chamam normalmente adição e multiplicação, que obedece às seguintes condições:

1) $(A,+)$ é um grupo comutativo
2) $(A,.)$ é um semi-grupo
3) A multiplicação é distributiva em relação à adição, à direita e à esquerda.

Um anel é comutativo quando a segunda operação é comutativa.
O elemento neutro do anel é o elemento neutro de $(A,+)$. (É o elemento neutro da primeira operação).
O elemento unidade do anel é o elemento neutro da segunda operação.

«Corpo» é um anel comutativo com elemento unidade e em que todos os elementos são regulares exceto o zero, ou seja,

$(A,+,.)$ é corpo se e só se

1) $(A,+)$ é um grupo comutativo
2) $(A,.)$ é um grupo comutativo para as operações que não incluem o zero da primeira operação (+)
3) A segunda operação (.) é distributiva em relação à primeira (+).

Assim, com as operações usuais, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos, mas $\mathbb{Z}$ não é.

Capítulo 5 – Conclusão

O Programa de Matemática A homologado em 2014 integra as Metas Curriculares que devem ser alcançadas por todos os alunos dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas.

A Matemática A é uma Disciplina específica na formação dos alunos que querem prosseguir estudos nas áreas das ciências exatas. Os Programas de Matemática B e de MACS (Matemática Aplicada às Ciências Sociais) dos outros Cursos Científico-Humanísticos, respetivamente de Artes Visuais e de Línguas e Humanidades, não sofreram (ainda) qualquer alteração.

Neste Novo Programa é feita a explicitação clara de todos os conteúdos que os alunos devem ficar a conhecer em cada ano de escolaridade (no Antigo Programa os objetivos da aprendizagem eram estabelecidos por ciclo de ensino) e os símbolos aplicados aos descritores, por um lado ajudam a perceber com que detalhe é que o docente deve tratar os assuntos e por outro lado, ajudam a clarificar o que se pretende que o aluno aprenda. Está perfeitamente definido para cada teorema, por exemplo, se o aluno precisa de o saber demonstrar ou se só precisa de o interpretar e aplicar ou ainda, se é suficiente ficar a conhecer o resultado.

Os Cadernos de Apoio à lecionação do Programa fornecem informações complementares para os professores: esclarecem sobre as metodologias a usar, apresentam algumas demonstrações, encaminham os docentes para o aprofundamento de alguns temas agora abordados e apresentam vários enunciados de exercícios para ilustrar os descritores das metas curriculares.

É um Programa claro, objetivo e rigoroso. Temos agora, alunos e docentes, a árdua tarefa de o cumprir. Precisamos de ajustar os métodos de trabalho ao que nos é exigido, recuperar e rentabilizar o tempo, desenvolver estratégias promotoras do sucesso,…, enfim, precisamos de nos adaptar ao Novo Programa.

Neste trabalho, procurou-se saber e perceber o que mudava em relação ao Antigo Programa e porquê.

Na análise feita constatou-se que as alterações que podem produzir mais impacto no ensino são:

1) a introdução de **conteúdos novos** neste ciclo de ensino
    - Lógica e Teoria dos Conjuntos, LTC10
    - Definição de elipse e respetivo estudo analítico, em GA10
    - Estatística de inferência (e as operações com somatórios), em EST10
    - Lei dos senos e Teorema de Carnot, em TRI11
    - Funções trigonométricas inversas, em TRI11
    - A equação vetorial de um plano, em GA11
    - Princípio da Indução Matemática, em SUC11
    - Teorema de Lagrange, em FRVR11
    - Osciladores harmónicos, Lei de Newton, Lei de Hooke e equações diferenciais, em TRI12
    - Equações diferenciais para resolver problemas que envolvem modelos exponenciais, em FEL12
    - Primitivas e Cálculo Integral, PCI12

2) a **alteração na metodologia** usada para fazer a abordagem ou o estudo de certos conteúdos
    - as justificações recorrendo à geometria sintética devem preceder sempre as justificações ou aplicações da geometria analítica, em GA10, TRI11,GA11,TRI12
    - a introdução dos números complexos segundo a perspetiva histórica, em NC12
    - as calculadoras gráficas só devem ser usadas quando os conteúdos ou capacidades envolvidos possam justificar a sua necessidade.

3) a introdução de **definições "novas"**
    - produto escalar, em GA11
    - ângulo generalizado, em TRI11
    - limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio, em FRVR11

4) a alteração no ano de escolaridade em que o tema é lecionado
    - a Estatística descritiva (era também dada no 10.º ano) passa a ser lecionada no ensino básico
    - a regressão linear aplicada a amostras bivariadas (era dada no 10.º) passa para o 11.º

- as operações sobre funções reais de variável real que eram dadas no 11.º ano, agora estão no 10.º ano
- o Teorema das sucessões enquadradas (era dado no 10.º) passa a ser dado no 12.º ano, estendendo-se também ao Teorema das funções enquadradas.
- o estudo dos juros compostos e a primeira definição do número de Neper passaram do 11.º para o 12.º ano

5) o desaparecimento de alguns temas
   - Introdução à Programação Linear (era do 11.º ano)
   - A resolução de sistemas de 3 equações lineares com 3 incógnitas, assim como as respetivas interpretações geométricas (posição relativa dos planos) saíram do programa (dava-se no 11.º ano)
   - A referência às distribuições de probabilidade: normal e binomial (antes no 12.º)

As razões que podem ser apontadas para estas mudanças, de um ponto de vista prático, prendem-se essencialmente com:

- A necessidade de estruturar o pensamento, desenvolver o raciocínio abstrato, melhorar a capacidade de argumentação e de analisar conjeturas. As noções elementares de Lógica são essenciais para uma comunicação matemática concisa e coerente mas também são pré-requisitos necessários em qualquer área do conhecimento.

- A aplicação de Programas de Avaliação Internacional ao sistema de ensino em Portugal e a promoção da internacionalização das formações "obriga" a um ajuste do nosso currículo à maioria dos currículos internacionais. Observando algumas das questões que surgem nos testes estrangeiros verificamos, por exemplo, que os alunos precisam de saber resolver triângulos com facilidade e rapidez e que é necessário saber calcular áreas usando o cálculo integral.

- As características fundamentais da Matemática, **o rigor e a precisão**, indispensáveis para interpretar e "modelar" corretamente o mundo real em que vivemos.

Referências

1. Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., *Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico – Matemática*, Ministério da Educação e Ciência, Direção Geral da Educação, 2013. (http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf)

2. Bivar, A., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., *Programa e Metas Curriculares do Ensino Secundário – Matemática A*, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas, Ministério da Educação e Ciência, Direção Geral da Educação, 2014. (http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf)

3. Bivar, A., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., *Caderno de Apoio do 10.º ano de Matemática A*, Ministério da Educação e Ciência, Direção Geral da Educação, 2014. (http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/ca_matematica_a_10ano.pdf)

4. Bivar, A., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., *Caderno de Apoio do 11.º ano de Matemática A*, Ministério da Educação e Ciência, Direção Geral da Educação, 2014. (http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/ca_matematica_a_11ano.pdf)

5. Bivar, A., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F. & Timóteo, M.C., *Caderno de Apoio do 12.º ano de Matemática A*, Ministério da Educação e Ciência, Direção Geral da Educação, 2014. (http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/mat_a_ca12.pdf)

6. Figueira, M., *Fundamentos de Análise Infinitesimal*, Textos de Matemática, volume 5, 5.ª edição, Lisboa, DM-FCUL, 2011.

7. IAVE (Instituto de Avaliação Educativa), Estudos Internacionais, 2015 (http://iave.pt/np4/np4/11.html; http://timssandpirls.bc.edu/timss2015-advanced/frameworks.html)

8. National Mathematics Advisory Panel, *Foundations for success: Final Report*, U.S. Department of Education, 2008. Disponível em: (http://wisemath.org/us-national-advisory-panel/)

9. Silva, J.C., Fonseca, C.M., Fonseca, M.G., Lopes, I. & Martins, A., *Programa de Matemática A, 10.º ano*, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2001. (http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/matematica_a_10.pdf)

10. Silva, J.C., Fonseca, C.M., Fonseca, M.G., Lopes, I. & Martins, A., *Programa de Matemática A, 11.º ano*, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 2002. (http://www.dge.mec.pt/matematica-ch-ct)

11. Silva, J.C., Fonseca, C.M., Fonseca, M.G., Lopes, I. & Martins, A., *Programa de Matemática A, 12.º ano*, Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, Lisboa, 2002. (http://www.dge.mec.pt/matematica-ch-ct)

12. Viana, J.P., O Problema deste número: Batalha Geométrica, *Educação e Matemática,* 132, (p. 10), APM, 2015 (http://www.apm.pt/files/_EM132_pp10-12_555b10d424833.pdf);

Anexos

1- Quadros Temáticos do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007

2- Síntese dos Domínios do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2013

3- Documentos relativos aos testes “TIMSS ADVANCED 2015”

Anexo 1- Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007

Quadros temáticos

Números e operações

1.º ciclo 1.º e 2.º anos	1.º ciclo 3.º e 4.º anos	2.º ciclo	3.º ciclo
Números naturais • Noção de número natural • Relações numéricas • Sistema de numeração decimal **Operações com números naturais** • Adição • Subtracção • Multiplicação • Divisão **Regularidades** • Sequências	**Números naturais** • Relações numéricas • Múltiplos e divisores **Operações com números naturais** • Adição • Subtracção • Multiplicação • Divisão **Regularidades** • Sequências	**Números naturais** • Números primos e compostos • Decomposição em factores primos • Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de dois números • Critérios de divisibilidade • Potências de base e expoente naturais • Potências de base 10 • Multiplicação e divisão de potências • Propriedades das operações e regras operatórias	
		Números inteiros • Noção de número inteiro e representação na recta numérica • Comparação e ordenação • Adição e subtracção com representação na recta numérica	**Números inteiros** • Multiplicação e divisão, propriedades • Potências, raiz quadrada e raiz cúbica
Números racionais não negativos • Fracções	**Números racionais não negativos** • Fracções • Decimais	**Números racionais não negativos** • Noção e representação de número racional • Comparação e ordenação • Operações • Valores aproximados • Percentagem	**Números racionais** • Representação, comparação e ordenação • Operações, propriedades e regras operatórias
			Números reais • Noção de número real e recta real • Relações < e > em *R* • Intervalos

Geometria e Medida

1.º ciclo		2.º ciclo	3.º ciclo
1.º e 2.º anos	3.º e 4.º anos		
Orientação espacial • Posição e localização • Pontos de referência e itinerários • Plantas	**Orientação espacial** • Posição e localização • Mapas, plantas e maquetas		
Figuras no plano e sólidos geométricos • Propriedades e classificação • Interior, exterior e fronteira • Composição e decomposição de figuras • Linhas rectas e curvas • Reflexão	**Figuras no plano e sólidos geométricos** • Propriedades e classificação • Planificação do cubo • Círculo e circunferência • Noção de ângulo • Rectas paralelas e perpendiculares • Reflexão	**Sólidos geométricos** • Prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera • Planificação e construção de modelos **Figuras no plano** • Rectas, semi-rectas e segmentos de recta • Ângulos: amplitude e medição • Polígonos: propriedades e classificação • Círculo e circunferência: propriedades e construção	**Sólidos geométricos** • Área da superfície e volume • Critérios de paralelismo e perpendicularidade entre planos, e entre rectas e planos **Triângulos e quadriláteros** • Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo • Congruência de triângulos • Propriedades, classificação e construção de quadriláteros **Circunferência** • Ângulo ao centro, ângulo inscrito e ângulo excêntrico • Lugares geométricos • Circunferência inscrita e circunferência circunscrita a um triângulo • Polígono regular inscrito numa circunferência
Dinheiro • Moedas, notas e contagem • Comparação e ordenação de valores • Estimação			
Comprimento, massa, capacidade e área • Medida e unidade de medida • Comparação e ordenação • Medição • Perímetro • Estimação **Tempo** • Sequências de acontecimentos • Unidades de tempo e medida do tempo	**Comprimento, massa, capacidade, área e volume** • Medida e medição • Unidades de medida *SI* • Perímetro, área e volume • Estimação **Tempo** • Unidades de tempo • Intervalo de tempo • Estimação	**Perímetros** • Polígonos regulares e irregulares • Círculo **Áreas** • Equivalência de figuras planas • Unidades de área • Área do triângulo e círculo **Volumes** • Volume do cubo, paralelepípedo e cilindro • Unidades de volume **Reflexão, rotação e translação** • Noção e propriedades da reflexão, da rotação e da translação • Simetrias axial e rotacional	**Teorema de Pitágoras** • Demonstração e utilização **Trigonometria no triângulo rectângulo** • Razões trigonométricas de ângulos agudos • Relações entre razões trigonométricas **Semelhança** • Noção de semelhança • Ampliação e redução de um polígono • Polígonos semelhantes • Semelhança de triângulos **Isometrias** • Translação associada a um vector • Propriedades das isometrias

Álgebra

2.º ciclo	3.º ciclo
Relações e regularidades • Expressões numéricas e propriedades das operações • Sequências e regularidades • Proporcionalidade directa	**Sequências e regularidades** • Termo geral de uma sequência numérica • Representação • Expressões algébricas **Equações** • Equações do 1.º grau a uma incógnita • Equações literais • Operações com polinómios • Equações do 2.º grau a uma incógnita • Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas **Inequações** • Inequações do 1.º grau a uma incógnita **Funções** • Conceito de função e de gráfico de uma função • Proporcionalidade directa e inversa como funções • Funções linear e afim • Funções do tipo $y = ax^2$

Organização e tratamento de dados

1.º ciclo		2.º ciclo	3.º ciclo
1.º e 2.º anos	3.º e 4.º anos		
Representação e interpretação de dados • Leitura e interpretação de informação apresentada em tabelas e gráficos • Classificação de dados utilizando diagramas de Venn e de Carroll • Tabelas de frequências absolutas, gráficos de pontos e pictogramas	**Representação e interpretação de dados e situações aleatórias** • Leitura e interpretação de informação apresentada em tabelas e gráficos • Gráficos de barras • Moda • Situações aleatórias	**Representação e interpretação de dados** • Formulação de questões • Natureza dos dados • Tabelas de frequências absolutas e relativas • Gráficos de barras, circulares, de linha e diagramas de caule-e-folhas • Média aritmética • Extremos e amplitude	**Planeamento estatístico** • Especificação do problema • Recolha de dados • População e amostra **Tratamento de dados** • Organização, análise e interpretação de dados — histograma • Medidas de localização e dispersão • Discussão de resultados **Probabilidade** • Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória • Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento

Capacidades transversais

1.º ciclo	2.º ciclo	3.º ciclo
Resolução de problemas • Compreensão do problema • Concepção, aplicação e justificação de estratégias	**Resolução de problemas** • Compreensão do problema • Concepção, aplicação e justificação de estratégias	**Resolução de problemas** • Compreensão do problema • Concepção, aplicação e justificação de estratégias
Raciocínio matemático • Justificação • Formulação e teste de conjecturas	**Raciocínio matemático** • Justificação • Argumentação • Formulação e teste de conjecturas	**Raciocínio matemático** • Formulação, teste e demonstração de conjecturas • Indução e dedução • Argumentação
Comunicação matemática • Interpretação • Representação • Expressão • Discussão	**Comunicação matemática** • Interpretação • Representação • Expressão • Discussão	**Comunicação matemática** • Interpretação • Representação • Expressão • Discussão

Anexo 2 - Síntese dos Domínios do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2013

1ºCiclo

1.º ano

Domínio	Conteúdos
NO1	**Números naturais** - Correspondências um a um e comparação do número de elementos de dois conjuntos; - Contagens de até vinte objetos; - O conjunto vazio e o número zero; - Números naturais até 100; contagens progressivas e regressivas. **Sistema de numeração decimal** - Ordens decimais: unidades e dezenas; - Valor posicional dos algarismos; - Ordem natural; os símbolos «<» e «>»; comparação e ordenação de números até 100. **Adição** - Adições cuja soma seja inferior a 100 por cálculo mental, métodos informais e tirando partido do sistema decimal de posição; - Os símbolos «+» e «=» e os termos «parcela» e «soma»; - Decomposição de números até 100 em somas; - Problemas de um passo envolvendo situações de juntar e acrescentar. **Subtração** - Subtrações envolvendo números naturais até 20 por métodos informais; - Relação entre a subtração e a adição; - Subtrações de números até 100 utilizando contagens progressivas e regressivas de no máximo nove unidades ou tirando partido do sistema de numeração decimal de posição; - O símbolo «–» e os termos «aditivo», «subtrativo» e «diferença»; - Problemas de um passo envolvendo situações de retirar, comparar ou completar.
GM1	**Localização e orientação no espaço** - Relações de posição e alinhamentos de objetos e pontos; - Comparação de distâncias entre pares de objetos e pontos; - Figuras geometricamente iguais. **Figuras geométricas** - Partes retilíneas de objetos e desenhos; partes planas de objetos; - Segmentos de reta e extremos de um segmento de reta; - Comparação de comprimentos e igualdade geométrica de segmentos de reta; - Figuras planas: retângulo, quadrado, triângulo e respetivos lados e vértices, circunferência, círculo; - Sólidos: cubo, paralelepípedo retângulo, cilindro e esfera. **Medida** **Distâncias e comprimentos** - Unidade de comprimento e medidas de comprimentos expressas como números naturais. **Áreas** - Figuras equidecomponíveis e figuras equivalentes. **Tempo** - Utilização de fenómenos cíclicos naturais para contar o tempo; - Dias, semanas meses e anos; - Designação dos dias da semana e dos meses do ano.

	Dinheiro - Moedas e notas da área do Euro; - Contagens de dinheiro envolvendo números até 100, apenas em euros ou apenas em cêntimos.
OTD1	**Representação de conjuntos** - Conjunto, elemento pertencente a um conjunto, cardinal de um conjunto; - Diagramas de Venn com conjuntos disjuntos. **Representação de dados** - Gráfico de pontos e pictograma em que cada figura representa uma unidade.

2.º ano

Domínio	Conteúdos
NO2	**Números naturais** - Numerais ordinais até vigésimo; - Números naturais até 1000; - Contagens de 2 em 2, de 5 em 5, de 10 em 10 e de 100 em 100; - Números pares e número ímpares; identificação através do algarismo das unidades. **Sistema de numeração decimal** - Ordens decimais: unidades, dezenas e centenas; - Valor posicional dos algarismos; - Comparação e ordenação de números até 1000. **Adição e Subtração** - Cálculo mental: somas de números de um algarismo, diferenças de números até 20, adições e subtrações de 10 e 100 a números de três algarismos; - Adições cuja soma seja inferior a 1000; - Subtrações de números até 1000; - Problemas de um ou dois passos envolvendo situações de juntar, acrescentar, retirar, comparar ou completar. **Multiplicação** - Sentido aditivo e combinatório; - O símbolo «×» e os termos «fator» e «produto»; - Produto por 1 e por 0; - Tabuadas do 2, 3, 4, 5, 6 e 10; - Os termos «dobro», «triplo», «quádruplo» e «quíntuplo»; - Problemas de um ou dois passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório. **Divisão inteira** - Divisão exata por métodos informais; - Relação entre a divisão exata e a multiplicação: dividendo, divisor e quociente; - O símbolo «:»; - Os termos «metade», «terça parte», «quarta parte» e «quinta parte»; - Problemas de um passo envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento.

	Números racionais não negativos - Frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$ como medidas de comprimentos e de outras grandezas; - Representação dos números naturais e das frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ e $\frac{1}{10}$ numa reta numérica. **Sequências e regularidades** - Problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência dada a lei de formação e a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida.
GM2	**Localização e orientação no espaço** - Direções no espaço relativamente a um observador; - Voltas inteiras, meias voltas, quartos de volta, viragens à direita e à esquerda; - Itinerários em grelhas quadriculadas. **Figuras geométricas** - Retas e semirretas; - Polígonos e linhas poligonais; - Parte interna e externa de linhas planas fechadas; - Triângulos isósceles, equiláteros e escalenos; - Quadriláteros (retângulo, quadrado e losango); - Pentágonos e hexágonos; - Sólidos geométricos – poliedros e não poliedros; pirâmides e cones; vértice, aresta e face; - Atributos geométricos e não geométricos de um objeto; - Construção de figuras com eixo de simetria. **Medida** **Distância e Comprimento** - Comparação de medidas de comprimento em dada unidade; - Subunidades de comprimento: um meio, um terço, um quarto, um quinto, um décimo, um centésimo e um milésimo da unidade; - Unidades do sistema métrico; - Perímetro de um polígono. **Área** - Medidas de área em unidades não convencionais. **Volume e capacidade** - Sólidos equidecomponíveis em cubos de arestas iguais; - Medidas de volume em unidades não convencionais; - Ordenação de capacidades de recipientes; - Medidas de capacidades em unidades não convencionais; - O litro como unidade de medida de capacidade; - Comparação de volumes de objetos por imersão em líquido contido num recipiente. **Massa** - Comparação de massas em balanças de dois pratos; - Pesagens em unidades não convencionais; - O quilograma como unidade de medida de massa. **Tempo** - Instrumentos de medida do tempo; - A hora; - Relógios de ponteiros e a medida do tempo em horas, meias horas e quartos de hora; - Calendários e horários.

	Dinheiro - Contagens de dinheiro em euros e cêntimos envolvendo números até 1000. **Problemas** - Problemas de um ou dois passos envolvendo medidas de diferentes grandezas.
OTD2	**Representação de conjuntos** - Reunião e interseção de conjuntos; - Diagramas de Vem e Carroll. **Representação de dados** - Tabelas de frequências absolutas, gráficos de pontos, de barras e pictogramas em diferentes escalas; - Esquemas de contagem (*tally charts*).

3.º ano

Domínio	Conteúdos
NO3	**Números naturais** - Numerais ordinais até centésimo; - Números naturais até um milhão; - Contagens progressivas e regressivas com saltos fixos; - Numeração romana. **Representação decimal de números naturais** - Leitura por classes e por ordens e decomposição decimal de números até um milhão; - Comparação de números até um milhão; - Arredondamentos. **Adição e subtração de números naturais** - Algoritmos da adição e da subtração envolvendo números até um milhão; - Problemas de até três passos envolvendo situações de juntar, acrescentar, retirar, comparar ou completar. **Multiplicação de números naturais** - Tabuadas do 7, 8 e 9; - Múltiplo de um número; - Cálculo mental: produto por 10, 100, 1000, etc.; produto de um número de um algarismo por um número de dois algarismos; - Algoritmo da multiplicação envolvendo números até um milhão; - Critério de reconhecimento dos múltiplos de 2, 5 e 10; - Problemas de até três passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório. **Divisão inteira** - Divisão inteira por métodos informais; - Relação entre dividendo, divisor, quociente e resto; - Cálculo mental: divisões inteiras com divisores e quocientes inferiores a 10;

	- Divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor; - Problemas de até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento. **Números racionais não negativos** - Fração como representação de medida de comprimento e de outras grandezas; numerais fracionários; - Representação de frações na reta numérica; - Frações equivalentes e noção de número racional; - Ordenação de números racionais representados por frações com o mesmo numerador ou o mesmo denominador, ou utilizando a reta numérica ou a medição de outras grandezas; - Frações próprias. **Adição e subtração de números racionais não negativos representados por frações** - Adição e subtração na reta numérica por justaposição retilínea de segmentos de reta; - Produto de um número natural por um número racional representado por uma fração unitária; - Adição e subtração de números racionais representados por frações com o mesmo denominador; - Decomposição de um número racional na soma de um número natural com um número racional representável por uma fração própria. **Representação decimal de números racionais não negativos** - Frações decimais; representação na forma de dízimas finitas; - Redução de frações decimais ao mesmo denominador; adição de números racionais representados por frações decimais com denominadores até mil; - Algoritmos para a adição e para a subtração de números racionais representados por dízimas finitas; - Decomposição decimal de um número racional representado na forma de uma dízima finita.
GM3	**Localização e orientação no espaço** - Segmentos de reta paralelos e perpendiculares em grelhas quadriculadas; - Direções perpendiculares e quartos de volta; - Direções horizontais e verticais; - Coordenadas em grelhas quadriculadas. **Figuras geométricas** - Circunferência, círculo, superfície esférica e esfera; centro, raio e diâmetro; - Identificação de eixos de simetria em figuras planas. **Medida** **Comprimento** - Unidades de medida de comprimento do sistema métrico; conversões. **Área** - Medições de áreas em unidades quadradas; - Fórmula para a área do retângulo de lados de medida inteira. **Massa** - Unidades de massa do sistema métrico; conversões; - Pesagens em unidades do sistema métrico; - Relação entre litro e quilograma.

	Capacidade - Unidades de capacidade do sistema métrico; conversões; - Medições de capacidades em unidades do sistema métrico. **Tempo** - Minutos e segundos; leitura do tempo em relógios de ponteiros; - Conversões de medidas de tempo; - Adição e subtração de medidas de tempo. **Dinheiro** - Adição e subtração de quantias de dinheiro. **Problemas** - Problemas de até três passos envolvendo medidas de diferentes grandezas.
OTD3	**Representação e tratamento de dados** - Diagramas de caule-e-folhas; - Frequência absoluta; - Moda; - Mínimo, máximo e amplitude; - Problemas envolvendo análise e organização de dados, frequência absoluta, moda e amplitude.

4.º ano

Domínio	Conteúdos
NO4	**Números naturais** - Extensão das regras de construção dos numerais decimais para classes de grandeza indefinida; - Diferentes significados do termo «bilião». **Divisão inteira** - Algoritmo da divisão inteira; - Determinação dos divisores de um número natural até 100; - Problemas de vários passos envolvendo números naturais e as quatro operações. **Números racionais não negativos** - Construção de frações equivalentes por multiplicação dos termos por um mesmo fator; - Simplificação de frações de termos pertencentes à tabuada do 2 e do 5 ou ambos múltiplos de 10. **Multiplicação e divisão de números racionais não negativos** - Multiplicação e divisão de números racionais por naturais e por racionais na forma de fração unitária; - Produto e quociente de um número representado por uma dízima por 10, 100, 1000, 0,1, 0,01 e 0,001; - Utilização do algoritmo da divisão inteira para obter aproximações na forma de dízima de números racionais; - Multiplicação de números racionais representados por dízimas finitas, utilizando o algoritmo. - Utilização do algoritmo da divisão inteira para obter aproximações na forma de dízima de quocientes de números racionais; - Problemas de vários passos envolvendo números racionais, aproximações de números racionais e as quatro operações.

5.º ano

Domínio	Conteúdos
NO5 54 tempos	**Números racionais não negativos** - Simplificação de frações; - Frações irredutíveis; - Redução de duas frações ao mesmo denominador; - Ordenação de números racionais representados por frações; - Adição, subtração, multiplicação e divisão de números racionais não negativos representados na forma de fração; - Representação de números racionais na forma de numerais mistos; adição e subtração de números racionais representados por numerais mistos; - Aproximações e arredondamentos de números racionais; - Problemas de vários passos envolvendo números racionais representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos. **Números naturais** - Critérios de divisibilidade por 3, 4 e 9; - Determinação do máximo divisor comum de dois números naturais por inspeção dos divisores de cada um deles; - Algoritmo de Euclides; - Números primos entre si; números obtidos por divisão de dois dados números pelo respetivo máximo divisor comum; irredutibilidade das frações de termos primos entre si; - Determinação do mínimo múltiplo comum de dois números naturais por inspeção dos múltiplos de cada um deles; - Relação entre o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de dois números; - Problemas envolvendo o cálculo do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum de dois números.
GM5 88 tempos	**Propriedades geométricas** **Ângulos, paralelismo e perpendicularidade** - Ângulo igual à soma de outros dois; definição e construção com régua e compasso; - Bissetriz de um ângulo; construção com régua e compasso; - Ângulos complementares e suplementares; - Igualdade de ângulos verticalmente opostos; - Semirretas diretamente e inversamente paralelas; - Ângulos correspondentes e paralelismo; - Ângulos internos, externos e pares de ângulos alternos internos e alternos externos determinados por uma secante num par de retas concorrentes; relação com o paralelismo; - Ângulos de lados diretamente e inversamente paralelos; pares de ângulos de lados perpendiculares. **Triângulos e quadriláteros** - Ângulos internos, externos e adjacentes a um lado de um polígono; - Ângulos de um triângulo: soma dos ângulos internos, relação de um ângulo externo com os internos não adjacentes e soma de três ângulos externos com vértices distintos; - Triângulos acutângulos, obtusângulos e retângulos; hipotenusa e catetos de um triângulo retângulo; - Ângulos internos de triângulos obtusângulos e retângulos; - Paralelogramos; ângulos opostos e adjacentes de um paralelogramo; - Critérios de igualdade de triângulos: critérios LLL, LAL e ALA; construção de triângulos dados os comprimentos de lados e/ou as amplitudes de ângulos internos; - Relações entre lados e ângulos num triângulo ou em triângulos iguais; - Igualdade dos lados opostos de um paralelogramo; - Desigualdade triangular; - Pé da perpendicular traçada de um ponto para uma reta e, num dado plano, perpendicular a uma reta num ponto;

	- Distância de um ponto a uma reta e entre retas paralelas; altura de um triângulo e de um paralelogramo. **Problemas** - Problemas envolvendo as noções de paralelismo, perpendicularidade, ângulos e triângulos. **Medida** **Área** - Área de retângulos de lados de medida racional; - Fórmulas para a área de paralelogramos e triângulos; - Problemas envolvendo o cálculo de áreas de figuras planas. **Amplitude de ângulos** - Medidas de amplitudes de ângulos; - O grau como unidade de medida de amplitude; minutos e segundos de grau; - Utilização do transferidor para medir amplitudes de ângulos e para construir ângulos de uma dada medida de amplitude; - Problemas envolvendo adições, subtrações e conversões de medidas de amplitude expressas em forma complexa e incomplexa.
ALG5 16 tempos	**Expressões algébricas e propriedades das operações** - Prioridades convencionadas das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; utilização de parêntesis; - Propriedades associativa e comutativa da adição e multiplicação e propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição e subtração; - Elementos neutros da adição e da multiplicação e elemento absorvente da multiplicação de números racionais não negativos; - Utilização do traço de fração com o significado de quociente de números racionais; - Inversos dos números racionais positivos; - Produto e quociente de quocientes de números racionais; inverso de um produto e de um quociente de números racionais; - Cálculo de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas e a utilização de parêntesis; - Linguagem natural e linguagem simbólica.
OTD5 22 tempos	**Gráficos cartesianos** - Referenciais cartesianos, ortogonais e monométricos; - Abcissas, ordenadas e coordenadas; - Gráficos cartesianos. **Representação e tratamento de dados** - Tabelas de frequências absolutas e relativas; - Gráficos de barras e de linhas; - Média aritmética; - Problemas envolvendo a média e a moda; - Problemas envolvendo dados em tabelas, diagramas e gráficos.

6.º ano

Domínio	Conteúdos
NO6 40 tempos	**Números naturais** - Números primos; - Crivo de Eratóstenes; - Teorema fundamental da aritmética e aplicações. **Números racionais** **Números racionais positivos e negativos** - Números racionais negativos; - Simétrico e valor absoluto de um número racional; - Semirreta de sentido positivo associada a um número; ordenação de números racionais; - Conjunto dos números inteiros relativos e conjunto dos números racionais. **Adição e subtração** - Segmentos de reta orientados; orientação positiva e negativa de segmentos orientados da reta numérica; - Adição de números racionais; definição e propriedades; - Subtração e soma algébrica de números racionais; definição e propriedades; - Módulo da diferença de dois números como medida da distância entre os pontos que representam esses números na reta numérica.
GM6 60 tempos	**Figuras geométricas planas** - Ângulo ao centro e setor circular; - Polígonos inscritos numa circunferência; - Retas e segmentos de reta tangentes a uma circunferência; - Polígonos circunscritos a uma circunferência; - Apótema de um polígono. **Sólidos geométricos e propriedades** - Prismas; prismas oblíquos e regulares; - Pirâmides; - Bases, faces laterais e vértices de prismas e pirâmides; - Pirâmides regulares; - Cilindros; bases, eixo, geratrizes e superfície lateral de um cilindro; - Cones; base, vértice, eixo, geratrizes e superfície lateral de um cone; - Cilindros e cones retos; - Relação entre o número de arestas e de vértices de um prisma (ou pirâmide) e da respetiva base; - Poliedros convexos; - Relação de Euler; - Planificações de sólidos; - Problemas envolvendo sólidos geométricos e respetivas planificações. **Medida** **Área** - Fórmula para o perímetro do círculo; aproximação por perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos; - Fórmula para a área de polígonos regulares; - Fórmula para a área ~~e~~ do círculo; aproximação por áreas de polígonos regulares inscritos; - Problemas envolvendo o cálculo de perímetros e áreas de polígonos e círculos.

	Volume - Fórmula para o volume do paralelepípedo retângulo com dimensões de medida racional; - Fórmulas para o volume do prisma reto e do cilindro reto; - Problemas envolvendo o cálculo de volumes de sólidos. **Isometrias do plano** - Reflexão central como isometria; invariância da amplitude de ângulo; - Mediatriz de um segmento de reta; construção da mediatriz utilizando régua e compasso; - Reflexão axial como isometria; invariância da amplitude de ângulo; eixos de simetria; a bissetriz de um ângulo como eixo de simetria; - Rotação de sentido positivo ou negativo como isometria; invariância da amplitude de ângulo; - Imagem de um segmento de reta por uma isometria; - Construção de imagens de figuras planas por reflexões centrais e axiais e por rotações; - Simetrias de rotação e de reflexão; - Problemas envolvendo as propriedades das isometrias e utilizando raciocínio dedutivo; - Problemas envolvendo figuras com simetrias de rotação e de reflexão axial.
ALG6 54 tempos	**Potências de expoente natural** - Potência de base racional não negativa; - Regras operatórias das potências de base racional não negativa; - Prioridade das operações; - Linguagem simbólica e linguagem natural em enunciados envolvendo potências. **Sequências e regularidades** - Determinação de termos de uma sequência definida por uma lei de formação recorrente ou por uma expressão geradora; - Determinação de expressões geradoras de sequências definidas por uma lei de formação recorrente; - Problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida. **Proporcionalidade direta** - Noção de grandezas diretamente proporcionais e de constante de proporcionalidade direta; - Proporções; extremos, meios e termos de uma proporção; propriedades; regra de três simples; - Escalas em mapas; - Problemas envolvendo a noção de proporcionalidade direta entre grandezas mutuamente dependentes.
OTD6 14 tempos	**Representação e tratamento de dados** - População e unidade estatística; - Variáveis quantitativas e qualitativas; - Gráficos circulares; - Análise de conjuntos de dados a partir da média, moda e amplitude; - Problemas envolvendo dados representados de diferentes formas.

7.º ano

Domínio	Conteúdos
NO7 18 tempos	**Números racionais** - Simétrico da soma e da diferença de racionais; - Extensão da multiplicação a todos os racionais; - Extensão da divisão ao caso em que o dividendo é um racional qualquer e o divisor um racional não nulo.
GM7 66 tempos	**Alfabeto grego** - As letras $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi, \rho$ e σ do alfabeto grego. **Figuras Geométricas** **Linhas poligonais e polígonos** - Linhas poligonais; vértices, lados, extremidades, linhas poligonais fechadas e simples; parte interna e externa de linhas poligonais fechadas simples; - Polígonos simples; vértices, lados, interior, exterior, fronteira, vértices e lados consecutivos; - Ângulos internos de polígonos; - Polígonos convexos e côncavos; caracterização dos polígonos convexos através dos ângulos internos; - Ângulos externos de polígonos convexos; - Soma dos ângulos internos de um polígono; - Soma de ângulos externos de um polígono convexo; - Diagonais de um polígono. **Quadriláteros** - Diagonais de um quadrilátero; - Paralelogramos: caracterização através das diagonais e caracterização dos retângulos e losangos através das diagonais; - Papagaios: propriedade das diagonais; o losango como papagaio; - Trapézios: bases; trapézios isósceles, escalenos e retângulos; caracterização dos paralelogramos; - Problemas envolvendo triângulos e quadriláteros. **Paralelismo, congruência e semelhança** - Isometrias e semelhanças; - Critério de semelhança de polígonos envolvendo os respetivos lados e diagonais; - Teorema de Tales; - Critérios de semelhança de triângulos (LLL, LAL e AA); igualdade dos ângulos correspondentes em triângulos semelhantes; - Semelhança dos círculos; - Critério de semelhança de polígonos envolvendo os respetivos lados e ângulos internos; - Divisão de um segmento num número arbitrário de partes iguais utilizando régua e compasso, com ou sem esquadro; - Homotetia direta e inversa; - Construção de figuras homotéticas; - Problemas envolvendo semelhanças de triângulos e homotetias. **Medida** **Mudanças de unidade de comprimento e incomensurabilidade** - Conversões de medidas de comprimento por mudança de unidade; - Invariância do quociente de medidas; - Segmentos de reta comensuráveis e incomensuráveis; - Incomensurabilidade da hipotenusa com os catetos de um triângulo retângulo isósceles.

	Áreas de quadriláteros - Área do papagaio e do losango; - Área do trapézio. **Perímetros e áreas de figuras semelhantes** - Razão entre perímetros de figuras semelhantes; - Razão entre áreas de figuras semelhantes; - Problemas envolvendo perímetros e áreas de figuras semelhantes.
FSS7 25 tempos	**Funções** **Definição de função** - Função ou aplicação f de A em B; domínio e contradomínio; igualdade de funções; - Pares ordenados; gráfico de uma função; variável independente e variável dependente; - Funções numéricas; - Gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica; equação de um gráfico cartesiano. **Operações com funções numéricas** - Adição, subtração e multiplicação de funções numéricas e com o mesmo domínio; exponenciação de expoente natural de funções numéricas; - Operações com funções numéricas de domínio finito dadas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos; - Funções constantes, lineares e afins; formas canónicas, coeficientes e termos independentes; propriedades algébricas e redução à forma canónica; - Funções de proporcionalidade direta; - Problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta. **Sequências e sucessões** - Sequências e sucessões como funções; - Gráficos cartesianos de sequências numéricas; - Problemas envolvendo sequências e sucessões.
ALG7 28 tempos	**Expressões algébricas** - Extensão a $\mathbb{Q}$ das propriedades associativa e comutativa da adição e da multiplicação; - Extensão a $\mathbb{Q}$ da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração; - Extensão a $\mathbb{Q}$ das regras de cálculo do inverso de produtos e quocientes e do produto e do quociente de quocientes; - Extensão a $\mathbb{Q}$ da definição e propriedades das potências de expoente natural; potência do simétrico de um número; - Simplificação e cálculo do valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas, a potenciação e a utilização de parêntesis. **Raízes quadradas e cúbicas** - Monotonia do quadrado e do cubo; - Quadrado perfeito e cubo perfeito; - Raiz quadrada de quadrado perfeito e raiz cúbica de cubo perfeito; - Produto e quociente de raízes quadradas e cúbicas; - Representações decimais de raízes quadradas e cúbicas. **Equações algébricas** - Equação definida por um par de funções; primeiro e segundo membro, soluções e conjunto-solução; - Equações possíveis e impossíveis; - Equações equivalentes;

	- Equações numéricas; princípios de equivalência; - Equação linear com uma incógnita; simplificação e caracterização do conjunto-solução; equações lineares impossíveis, possíveis, determinadas e indeterminadas; equação algébrica de 1.º grau; - Soluções exatas e aproximadas de equações algébricas de 1.º grau; - Problemas envolvendo equações lineares.
OTD7 10 tempos	**Medidas de localização** - Sequência ordenada dos dados; - Mediana de um conjunto de dados; definição e propriedades; - Problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização.

8.º ano

Domínio	Conteúdos
NO8 20 tempos	**Dízimas finitas e infinitas periódicas** - Caracterização das frações irredutíveis equivalentes a frações decimais; - Representação de números racionais através de dízimas finitas ou infinitas periódicas utilizando o algoritmo da divisão; período e comprimento do período de uma dízima; - Conversão em fração de uma dízima infinita periódica; - Decomposição decimal de números racionais representados por dízimas finitas, utilizando potências de base 10 e expoente inteiro; - Notação científica; aproximação, ordenação e operações em notação científica; - Definição de dízima infinita não periódica; - Representação na reta numérica de números racionais dados na forma de dízima. **Dízimas infinitas não periódicas e números reais** - Pontos irracionais da reta numérica; exemplo; - Números irracionais e dízimas infinitas não periódicas; - Números reais; extensão a $\mathbb{R}$ das operações conhecidas sobre $\mathbb{Q}$ e respetivas propriedades; extensão a medidas reais das propriedades envolvendo proporções entre comprimentos de segmentos; - Irracionalidade de $\sqrt{n}$ para n natural e distinto de um quadrado perfeito; - Construção da representação de raízes quadradas de números naturais na reta numérica, utilizando o Teorema de Pitágoras; - Extensão a $\mathbb{R}$ da ordem em $\mathbb{Q}$; propriedades transitiva e tricotómica da relação de ordem; ordenação de números reais representados na forma de dízima.
GM8 40 tempos	**Teorema de Pitágoras** - Teorema de Pitágoras e o respetivo recíproco; - Problemas envolvendo os teoremas de Pitágoras e de Tales e envolvendo a determinação de distâncias desconhecidas por utilização destes teoremas. **Vetores, translações e isometrias** - Segmentos orientados com a mesma direção e sentido e com a mesma direção e sentidos opostos; comprimento de um segmento orientado; segmento orientado reduzido a um ponto; - Segmentos orientados equipolentes e vetores; - Vetores colineares e simétricos; - Soma de um ponto com um vetor e translação determinada por um vetor; - Composta de translações e soma de vetores; regras do triângulo e do paralelogramo; propriedades algébricas da adição algébrica de vetores;

	- Translações como isometrias; caracterização pela preservação da direção e sentido dos segmentos orientados e semirretas; - Reflexões deslizantes como isometrias; - Ação das isometrias sobre as retas, as semirretas e os ângulos e respetivas amplitudes; - Classificação das isometrias do plano; - Problemas envolvendo as propriedades das isometrias do plano; - Problemas envolvendo figuras com simetrias de translação, rotação, reflexão axial e reflexão deslizante.
FSS8 15 tempos	**Gráficos de funções afins** - Equação de reta não vertical e gráfico de função linear ou afim; - Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical; - Relação entre declive e paralelismo; - Determinação do declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas; - Equação de reta vertical; - Problemas envolvendo equações de retas.
ALG8 62 tempos	**Potências de expoente inteiro** - Potência de expoente nulo; - Potência de expoente negativo; - Extensão a potências de expoente inteiro das propriedades conhecidas das potências de expoente natural. **Monómios e Polinómios** - Monómios; fatores numéricos, constantes e varáveis ou indeterminadas; parte numérica ou coeficiente; monómio nulo e monómio constante; parte literal; - Monómios semelhantes; forma canónica de um monómio; igualdade de monómios; - Grau de um monómio; - Soma algébrica e produto de monómios; - Polinómios; termos; variáveis ou indeterminadas, coeficientes; forma reduzida; igualdade de polinómios; termo independente; polinómio nulo; - Grau de um polinómio; - Soma algébrica e produto de polinómios; - Casos notáveis da multiplicação como igualdades entre polinómios; - Problemas associando polinómios a medidas de áreas e volumes, interpretando geometricamente igualdades que os envolvam; - Problemas envolvendo polinómios, casos notáveis da multiplicação de polinómios e fatorização. **Equações incompletas de 2.º grau** - Equação do 2.º grau; equação incompleta; - Lei do anulamento do produto; - Resolução de equações incompletas de 2.º grau - Resolução de equações de 2.º grau tirando partido da lei do anulamento do produto; - Problemas envolvendo equações de 2.º grau. **Equações literais** - Equações literais; - Resolução em ordem a uma dada incógnita de equações literais do 1.º e 2.º grau. **Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas** - Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas; forma canónica; soluções; sistemas equivalentes;

	- Interpretação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas; - Resolução de sistemas de duas equações de 1.º grau pelo método de substituição. - Problemas envolvendo sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.
OTD8 10 tempos	**Diagramas de extremos e quartis** - Noção de quartil; - Diagramas de extremos e quartis; - Amplitude interquartil; - Problemas envolvendo gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis.

9.º ano

Domínio	Conteúdos
NO9 15 tempos	**Relação de ordem em $\mathbb{R}$** **Propriedades da relação de ordem** - Monotonia da adição; - Monotonia parcial da multiplicação; - Adição e produto de inequações membro a membro; - Monotonia do quadrado e do cubo; - Inequações e passagem ao inverso; - Simplificação e ordenação de expressões numéricas reais envolvendo frações, dízimas ou radicais, utilizando as propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$. **Intervalos** - Intervalos de números reais; - Representação de intervalos de números reais na reta numérica; - Interseção e reunião de intervalos. **Valores aproximados de resultados de operações** - Aproximações da soma e do produto de números reais; - Aproximações de raízes quadradas e cúbicas; - Problemas envolvendo aproximações de medidas de grandezas.
GM9 65 tempos	**Axiomatização das teorias Matemáticas** **Vocabulário do método axiomático** - Teorias; objetos e relações primitivas; axiomas; - Axiomática de uma teoria; definições, teoremas e demonstrações; - Teorias axiomatizadas como modelos da realidade; - Condições necessárias e suficientes; hipótese e tese de um teorema; o símbolo «$\Rightarrow$»; - Lemas e corolários. **Axiomatização da Geometria** - Referência às axiomáticas para a Geometria Euclidiana; axiomáticas equivalentes; exemplos de objetos e relações primitivas; - Axiomática de Euclides; referência aos «Elementos» e aos axiomas e postulados de Euclides; confronto com a noção atual de axioma; - Lugares geométricos.

Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos

A Geometria euclidiana e o axioma das paralelas
- 5.º Postulado de Euclides e axioma euclidiano de paralelismo;
- Referência às Geometrias não-euclidianas; Geometria hiperbólica ou de Lobachewski;
- Demonstrações de propriedades simples de posições relativas de retas num plano, envolvendo o axioma euclidiano de paralelismo.

Paralelismo de retas e planos no espaço euclidiano
- Planos concorrentes; propriedades;
- Retas paralelas e secantes a planos; propriedades;
- Paralelismo de retas no espaço; transitividade;
- Paralelismo de planos: caracterização do paralelismo de planos através do paralelismo de retas; transitividade; existência e unicidade do plano paralelo a um dado plano contendo um ponto exterior a esse plano.

Perpendicularidade de retas e planos no espaço euclidiano
- Ângulo de dois semiplanos com fronteira comum;
- Semiplanos e planos perpendiculares;
- Retas perpendiculares a planos; resultados de existência e unicidade; projeção ortogonal de um ponto num plano; reta normal a um plano e pé da perpendicular; plano normal a uma reta;
- Paralelismo de planos e perpendicularidade entre reta e plano;
- Critério de perpendicularidade de planos;
- Plano mediador de um segmento de reta.

Problemas
- Problemas envolvendo posições relativas de retas e planos.

Medida

Distâncias a um plano de pontos, retas paralelas e planos paralelos
- Distância de um ponto a um plano;
- Projeção ortogonal num plano de uma reta paralela ao plano e distância entre a reta e o plano;
- Distância entre planos paralelos;
- Altura da pirâmide, do cone e do prisma.

Volumes e áreas de superfícies de sólidos
- Volume da pirâmide, cone e esfera;
- Área da superfície de poliedros, da superfície lateral de cones retos e da superfície esférica;
- Problemas envolvendo o cálculo de áreas e volumes de sólidos.

Trigonometria

- Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo;
- Fórmula fundamental da Trigonometria;
- Relação entre a tangente de um ângulo agudo e o seno e cosseno do mesmo ângulo;
- Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares;
- Dedução dos valores das razões trigonométricas dos ângulos de 45°, 30° e 60°;
- Utilização de tabelas e de uma calculadora para a determinação de valores aproximados da amplitude de um ângulo conhecida uma razão trigonométrica desse ângulo;
- Problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas.

Lugares Geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos

- A bissetriz de um ângulo como lugar geométrico;
- Circuncentro, incentro, ortocentro e baricentro de um triângulo; propriedades e construção;
- Problemas envolvendo lugares geométricos no plano.

	Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência - Arcos de circunferência; extremos de um arco; arco menor e maior; - Cordas; arcos subtensos por uma corda; arco correspondente a uma corda; propriedades; - Amplitude de um arco; - Ângulo inscrito num arco; arco capaz; arco compreendido entre os lados de um ângulo inscrito; propriedades; - Segmento de círculo maior e menor; - Ângulo do segmento; ângulo ex-inscrito; propriedades; - Ângulos de vértice no exterior ou no interior de um círculo e lados intersetando a respetiva circunferência; propriedades; - Demonstração das fórmulas para a soma dos ângulos internos e de n ângulos externos com vértices distintos de um polígono convexo; aplicações: demonstração da fórmula para a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência; construção aproximada de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência utilizando transferidor; - Problemas envolvendo ângulos e arcos definidos numa circunferência e ângulos internos e externos de polígonos regulares.
FSS9 11 tempos	**Funções algébricas** - Funções de proporcionalidade inversa; referência à hipérbole; - Problemas envolvendo funções de proporcionalidade inversa; - Funções da família $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$; - Conjunto-solução da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ como interseção da parábola de equação $y = ax^2$ com a reta de equação $y = -bx - c$.
ALG9 29 tempos	**Inequações** - Inequação definida por um par de funções; primeiro e segundo membro, soluções e conjunto--solução; - Inequações possíveis e impossíveis; - Inequações equivalentes; - Princípios de equivalência; - Inequações de 1.º grau com uma incógnita; - Simplificação de inequações de 1.º grau; determinação do conjunto-solução na forma de um intervalo; - Determinação dos conjuntos-solução de conjunções e disjunções de inequações do 1.º grau como intervalos ou reunião de intervalos disjuntos; - Problemas envolvendo inequações de 1.º grau. **Equações do 2.º grau** - Equações de 2.º grau completas; completamento do quadrado; - Fórmula resolvente; - Problemas geométricos e algébricos envolvendo equações de 2.º grau. **Proporcionalidade Inversa** - Grandezas inversamente proporcionais; critério de proporcionalidade inversa; - Constante de proporcionalidade inversa; - Problemas envolvendo grandezas inversamente e diretamente proporcionais.
OTD9 22 tempos	**Histogramas** - Variáveis estatísticas discretas e contínuas; classes determinadas por intervalos numéricos; agrupamento de dados em classes da mesma amplitude; - Histogramas; propriedades; - Problemas envolvendo a representação de dados em tabelas de frequência e histogramas.

Probabilidade

- Experiências deterministas e aleatórias; universo dos resultados ou espaço amostral; casos possíveis;
- Acontecimentos: casos favoráveis, acontecimento elementar, composto, certo, impossível;
- Acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e complementares;
- Experiências aleatórias com acontecimentos elementares equiprováveis;
- Definição de Laplace de probabilidade; propriedades e exemplos;
- Problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos compostos, utilizando tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore;
- Comparação de probabilidades com frequências relativas em experiências aleatórias em que se presume equiprobabilidade dos casos possíveis.

CHAPTER 1

TIMSS Advanced 2015 Mathematics Framework

Liv Sissel Grønmo, Mary Lindquist, and Alka Arora

The assessment framework for TIMSS Advanced—Mathematics is organized around two dimensions: a content dimension specifying the domains of subject matter to be assessed within mathematics (i.e., algebra, calculus, and geometry) and a cognitive dimension specifying the domains of thinking processes to be assessed (i.e., knowing, applying, and reasoning). The cognitive domains describe the sets of behaviors expected of students as they engage with the mathematics content.

In general, these frameworks are similar to those used in TIMSS Advanced 2008. However, there have been minor updates to particular topics to better reflect the curricula, standards, and frameworks of the participating TIMSS Advanced countries. Also, attention was paid to current research and initiatives concerning mathematics and mathematics education, such as the *Common Core State Standards for Mathematics* (National Governors Association, 2010) developed in the United States, the *Mathematics Higher 2 Syllabus* (Singapore Examinations and Assessment Board, 2013) used in Singapore, the *Mathematics Curriculum (Secondary 4–6)* (Education Bureau, Hong Kong SAR, 2007) used in Hong Kong, and the *AP Calculus Course Description* (College Board, 2012).

Exhibit 1 shows the target percentages of testing time devoted to each content and cognitive domain for the advanced mathematics assessment.

Exhibit 1: Target Percentages of the TIMSS Advanced 2015 Mathematics Assessment Devoted to Content and Cognitive Domains

Content Domains	Percentages
Algebra	35%
Calculus	35%
Geometry	30%

Cognitive Domains	Percentages
Knowing	35%
Applying	35%
Reasoning	30%

TIMSS Advanced—Mathematics Content Domains

The TIMSS Advanced—Mathematics Framework consists of three content domains: algebra, calculus, and geometry. These content domains are the same content domains as were in the TIMSS Advanced 2008 Framework. Each of these content domains consists of topic areas, and each topic area in turn includes several topics. Across the advanced mathematics assessment, each topic receives approximately equal weight in terms of time allocated to assessing the topic.

Algebra

Algebra provides a foundation for further studies in mathematics as well as in many other disciplines. Building on the knowledge and skills developed in lower grades, the algebra domain encompasses three topic areas:

- Expressions and operations;
- Equations and inequalities; and
- Functions.

The first area includes operating with and evaluating a variety of algebraic expressions as well as working with arithmetic and geometric series. The second area includes using equations and inequalities, and systems of equations and inequalities to solve problems. The third area focuses on various representations and properties of functions.

Algebra: Expressions and Operations

1. Operate with exponential, logarithmic, polynomial, rational, and radical expressions; and perform operations with complex numbers.
2. Evaluate algebraic expressions (e.g., exponential, logarithmic, polynomial, rational, and radical).
3. Determine the n^{th} term of arithmetic and geometric series and the sums of finite and infinite series.

Algebra: Equations and Inequalities

1. Solve linear and quadratic equations and inequalities as well as systems of linear equations and inequalities.
2. Solve exponential, logarithmic, polynomial, rational, and radical equations.
3. Use equations and inequalities to solve contextual problems.

Algebra: Functions

1. Interpret, relate, and generate equivalent representations of functions, including composite functions, as ordered pairs, tables, graphs, formulas, or words.
2. Identify and contrast distinguishing properties of exponential, logarithmic, polynomial, rational, and radical functions.

Calculus

Calculus is an essential tool for understanding the principles governing the physical world and is the principal point of entry to most mathematically-based scientific careers. The calculus content for TIMSS Advanced—Mathematics concentrates on the following:

- Limits;
- Derivatives; and
- Integrals.

The focus is on understanding limits and finding the limit of a function, differentiation, and integration of a range of functions, and using these skills in solving problems.

Calculus: Limits

1. Determine limits of functions, including rational functions.
2. Recognize and describe the conditions for continuity and differentiability of functions.

Calculus: Derivatives

1. Differentiate polynomial, exponential, logarithmic, trigonometric, rational, radical, and composite functions; and differentiate products and quotients of functions.
2. Use derivatives to solve problems in optimization and rates of change.
3. Use first and second derivatives to determine slope, extrema, and points of inflection of polynomial and rational functions.
4. Use first and second derivatives to sketch and interpret graphs of functions.

Calculus: Integrals

1. Integrate polynomial, exponential, trigonometric, and simple rational functions.
2. Evaluate definite integrals, and apply integration to compute areas and volumes.

Geometry

Applications of geometry are tied directly to the solution of many real-world problems and are used extensively in the sciences. Because trigonometry has its origins in the study of triangle measurement, the geometry content domain also includes elements of trigonometry. The TIMSS Advanced 2015 geometry domain focuses on two topic areas common to most participating countries' curricula:

- Non-coordinate and coordinate geometry; and
- Trigonometry.

The focus of non-coordinate and coordinate geometry is on using the properties of geometric figures to solve problems in two and three dimensions, solving problems with coordinate geometry in two dimensions, and vectors. The other topic area concentrates on triangle trigonometry and trigonometric functions.

Geometry: Non-coordinate and Coordinate Geometry

1. Use non-coordinate geometry to solve problems in two and three dimensions.
2. Use coordinate geometry to solve problems in two dimensions.
3. Apply the properties of vectors and their sums and differences to solve problems.

Geometry: Trigonometry

1. Use trigonometry to solve problems involving triangles.
2. Recognize, interpret, and draw graphs of sine, cosine, and tangent functions.
3. Solve problems involving trigonometric functions.

TIMSS Advanced—Mathematics Cognitive Domains

The mathematics cognitive dimension consists of three domains based on what thinking processes students are expected to use when confronting the mathematics items developed for the TIMSS Advanced 2015 assessment. The first domain, knowing, addresses the students' ability to recall and recognize facts, procedures, and concepts necessary for a solid foundation in mathematics. The second domain, applying, focuses on using this knowledge to model and implement strategies to solve problems. The third domain, reasoning, includes analyzing, synthesizing, generalizing, and justifying through mathematical arguments or proofs. The situations requiring reasoning often are unfamiliar or complex.

While there is some hierarchy across the three cognitive domains (from knowing to applying to reasoning), each domain contains items representing a full range of difficulty. The following sections further describe the thinking skills and behaviors defining the cognitive domains. The general descriptions are followed by lists of specific behaviors to be elicited by items that are aligned with each domain.

Each content domain includes items developed to address each of the three cognitive domains. Accordingly, the algebra, calculus, and geometry domains include knowing, applying, and reasoning items.

Knowing

Knowing refers to students' knowledge of mathematical facts, concepts, and procedures. Mathematical facts and procedures form the foundation for mathematical thought.

Recall	Recall definitions, terminology, notation, mathematical conventions, number properties, and geometric properties.
Recognize	Recognize entities that are mathematically equivalent (e.g., different representations of the same function).
Compute	Carry out algorithmic procedures (e.g., determining derivatives of polynomial functions, and solving a simple equation).
Retrieve	Retrieve information from graphs, tables, texts, or other sources.

Applying

The applying domain involves the application of mathematics in a range of contexts. In this domain, students need to apply mathematical knowledge of facts, skills, and procedures or understanding of mathematical concepts to create representations and solve problems. The problems in this domain typically reflect standard types of problems expected to be familiar to students. Problems may be set in real-life situations, or may be purely mathematical in nature involving, for example, numeric or algebraic expressions, functions, equations, or geometric figures.

Determine	Determine efficient and appropriate methods, strategies, or tools for solving problems for which there are commonly used methods of solution.
Represent/Model	Generate an equation or diagram that models problem situations and generate equivalent representations for a given mathematical entity, or set of information.
Implement	Implement strategies and operations to solve problems in familiar mathematical concepts and procedures.

Reasoning

Reasoning mathematically involves logical, systematic thinking. Problems requiring reasoning may do so in different ways, because of the novelty of the context or the complexity of the situation, the number of decisions and steps, and may draw on knowledge and understanding from different areas of mathematics. Reasoning involves formulating conjectures, making logical deductions based on specific assumptions and rules, and justifying results.

Analyze	Identify the elements of a problem and determine the information, procedures, and strategies necessary to solve the problem.
Integrate/Synthesize	Link different elements of knowledge, related representations, and procedures to solve problems.
Evaluate	Determine the appropriateness of alternative strategies and solutions.
Draw Conclusions	Make valid inferences on the basis of information and evidence.
Generalize	Make statements that represent relationships in more general and more widely applicable terms.
Justify	Provide mathematical arguments, or proofs to support a strategy, solution, or statement.

APPENDIX B

Example Advanced Mathematics Items

Two mathematical models are proposed to predict the return y, in dollars, from the sale of x thousand units of an article (where $0 < x < 5$). Each of these models, P and Q, is based on different marketing methods.

model P: $y = 6x - x^2$
model Q: $y = 2x$

For what values of x does model Q predict a greater return than model P?

Ⓐ $0 < x < 4$

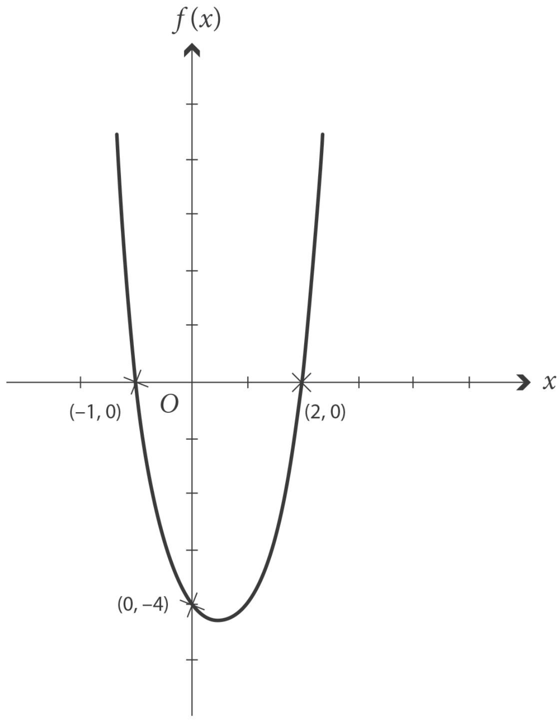
Ⓑ $0 < x < 5$

Ⓒ $3 < x < 5$

Ⓓ $3 < x < 4$

● $4 < x < 5$

MA13003



The graph of the function *f* is shown above. The equation of the function *f* is given by $f(x) = ax^2 + bx + c$. Find the values of *a*, *b*, and *c*.

Show your work.

$0 = a(-1)^2 + b(-1) + c$

$-4 = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow \boxed{c = -4}$

$0 = a(2)^2 + b(2) + c$

$0 = a - b - 4 \rightarrow a = 4 + b$

$0 = 4a + 2b - 4$

$\rightarrow \boxed{a = 2}$

$0 = 4(4+b) + 2b - 4$

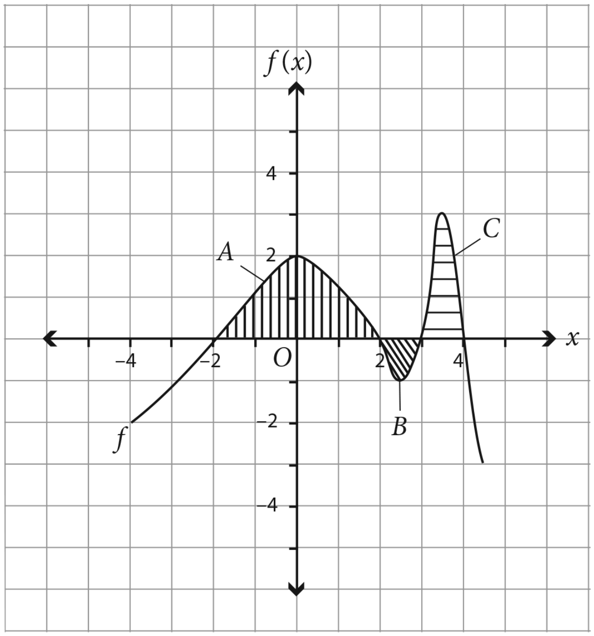
$0 = 12 + 6b$

$\boxed{b = -2}$

$f(x) = 2x^2 - 2x - 4$

MA23141

TIMSS ADVANCED 2015 FRAMEWORKS: B EXAMPLE MATHEMATICS ITEMS



For the areas between the graph of $f(x)$ and the x-axis shown above, area $A = 4.8$ units, area $B = 0.8$ units, and area $C = 2$ units.

What is the value of the definite integral $\int_{-2}^{4} f(x)dx$?

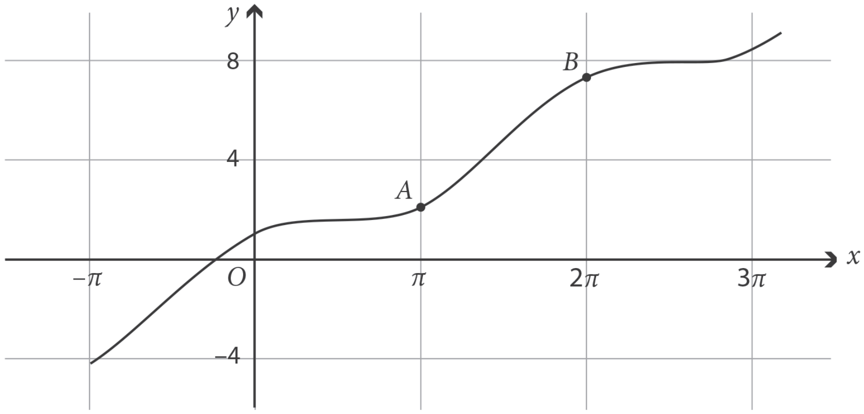
Ⓐ 5.6

● 6.0

Ⓒ 6.8

Ⓓ 7.6

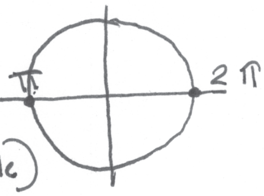
MA23050



Sophia is studying the graph of the function $y = x + \cos x$ shown above. She says that the slope at point A is the same as the slope at point B. Explain why she is correct.

If $f = x + \cos x$
then $f' = 1 - \sin x$

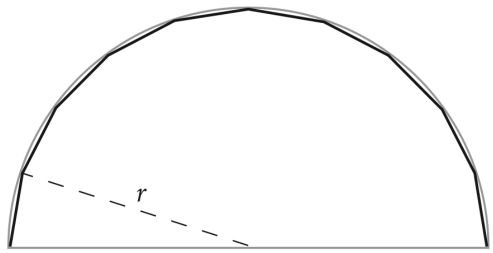
A both π and 2π, the sine (y value on unit circle) is 0.



→ both have $\sin = 0$

At both π and 2π, $f' = 1$. So f has the same slope at $x = \pi$ and $x = 2\pi$

MA23198



The figure shows a semicircular room seen from above. An architect is placing 10 flat windows in the room as shown. If the radius of the circle is r, which of the following equations would allow the architect to determine the width of each window?

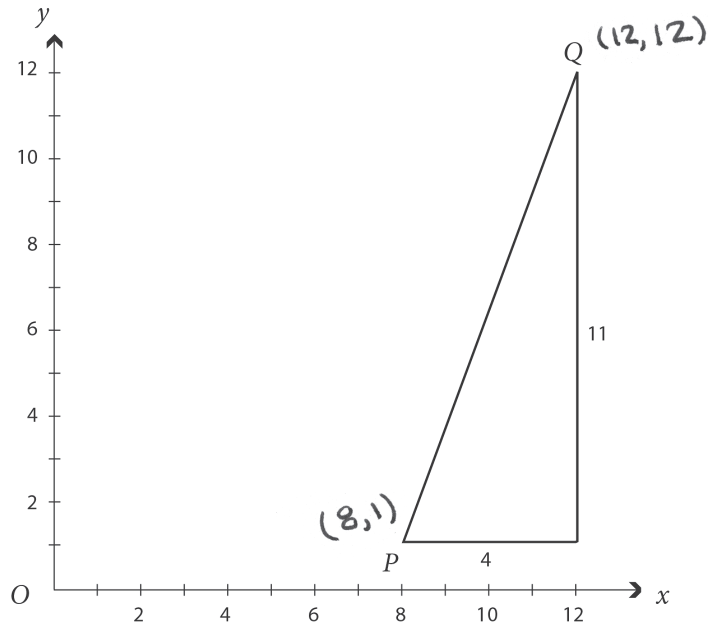
Ⓐ $w = r \sin 9°$

● $w = 2r \sin 9°$

Ⓒ $w = r \cos 18°$

Ⓓ $w = 2r \sin 18°$

MA23021



A straight line *l* passes through the points *A* (1,–2) and *B* (3, 4).
Is the line *l* parallel with *PQ*?

No

Give a reason to support your answer.

Parallel lines have the same slopes.

$$\text{Slope } PQ = \frac{12-1}{12-8} = \frac{11}{4}$$

$$\text{Slope } AB = \frac{4-(-2)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$

$AB \nparallel PQ$.

MA23170